Релятивистские поля и представления группы Пуанкаре

А. П. Исаев[1,2]

[1]Лаборатория теор. физики им. Н.Н.Боголюбова, ОИЯИ, Дубна

[2]Физический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова

Основано на совместных работах с И.Бухбиндером, С.Федоруком и М.Подойницыным

The XXV International Workshop-School
High Energy Physics and Quantum Field Theory
June 30 – July 5, 2025, Moscow, Russia

План

1. Введение
   - Спинорные группы Лоренца $SL(2,\mathbb{C})$ и Пуанкаре $ISL(2,\mathbb{C})$
   - Классификация унитарных представлений $ISL(2,\mathbb{C})$
2. Массивные унитарные НП группы $ISL(2,\mathbb{C})$
   - ВФ Баргмана-Вигнера, операторы Вигнера и локальные поля
   - Ур-ния Дирака-Паули-Фирца для масс. частиц с произв. спином
   - Примеры: массивные частицы со спинами $j = 1/2, 1$
3. **Операторы Вигнера для безмассовых НП $ISL(2,\mathbb{C})$**
   - Унитарные представления подгруппы $ISO(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$
   - Безмассовые спиральные представления $ISL(2,\mathbb{C})$
4. Заключение

Квантовая теория поля, описывающая динамику релятивистских частиц в 4-х мерном пространстве Минковского $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,3}$, с теоретико-групповой т. з. это теория унитарных неприводимых предст. группы Пуанкаре $IO(1,3)$.

Если исключить дискретные симметрии P, T, то теория должна обладать инвариантностью относительно преобр. из подгруппы $ISO^{\uparrow}(1,3) \subset IO(1,3)$. Для описания частиц с полуцелыми спинами необходимо рассматривать накрывающую группу $ISL(2,\mathbb{C})$ – спинорную группу Пуанкаре. Напомним:

1. Группа Пуанкаре – это множество всех вращений и сдвигов в $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,3}$; т.е. $ISL(2,\mathbb{C})$ – множество пар (A, X) двумерных комплексных матриц:

$$A \in SL(2,\mathbb{C}) \, , \qquad X^{\dagger} = X = x_m \sigma^m \in \mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,3} \, ,$$
$$\sigma^m = (\sigma^0 = I_2, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \, , \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{M} \, ,$$
$$\boxed{X \; \to \; X' = A \cdot X \cdot A^{\dagger} \, , \qquad A \cdot \sigma^m \cdot A^{\dagger} = \sigma^k \, \Lambda_k{}^m(A)} \, .$$

Матрица $\Lambda \in SO^{\uparrow}(1,3)$ – образ элемента A спинорной группы Лоренца. $SL(2,\mathbb{C})$.

2. Группы $SL(2,\mathbb{C})$ и $ISL(2,\mathbb{C})$ – некомпактные. Унитарные неприводимые представления (НП) некомпактных групп являются бесконечномерными.

3. Классификация всех унитарных НП групп $ISO^{\uparrow}(1,3)$ и $ISL(2,\mathbb{C})$ была дана Ю.Вигнером и В.Баргманом $\left[\begin{array}{c} E.Wigner(1939, 1947), \\ V.Bargmann, E.Wigner(1948) \end{array}\right]$.

Унитарные неприводимые представления (НП) делятся на массивные и безмассовые, а безмассовые – разделяются на спиральные представления и представления с непрерывным спином.

Алгебра Ли $\mathfrak{iso}(1,3)$ с образующими $\hat{P}_n, \hat{M}^{mk}$ $(n,m,k=0,1,2,3)$ имеет 2 оператора Казимира

$$C_2 = \hat{P}^n \hat{P}_n \;, \qquad C_4 = \hat{W}^n \hat{W}_n$$

где $\hat{W}_n = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{nmkr}\,\hat{M}^{mk}\,\hat{P}^r$ — компоненты вектора Паули-Любанского (ε_{mnkr} – полностью антисимметричный тензор).

Классификация НП группы $ISL(2,\mathbb{C})$:
[Ю.П.Вигнер (1939); В.Баргман, Ю.П.Вигнер (1948)]
дается перечислением возможных значений операторов Казимира.

1. Массивные НП. На пространстве состояний массивных НП операторы Казимира пропорциональны единичному оператору I:

$$C_2 = \hat{P}^n \hat{P}_n = \mathrm{m}^2 \; I \quad (\mathrm{m}^2 > 0), \qquad C_4 = \hat{W}^n \hat{W}_n = -\mathrm{m}^2 j(j+1) \; I \; ,$$

где I – единичный оператор, параметр $\mathrm{m} > 0$ называется массой, а параметр $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}/2$ называется спином spin.

2. Безмассовые представления. Для операторов Казимира имеем

$$C_2 = \hat{P}^n \hat{P}_n = \mathrm{m}^2 \; I = 0 \; , \quad C_4 = \hat{W}^2 = \hat{W}^n \hat{W}_n = -\mu^2 \; I \; .$$

В этом случае имеется 2 возможности: A. $\mu^2 = 0$ (спиральные представления) и B. $\mu^2 \neq 0$ (представления бесконечного (непрерывного) спина).

4. Унитарные НП групп $ISO^{\uparrow}(1,3)$ и $ISL(2,\mathbb{C})$ определяются как индуцированные представления и действуют в бесконечномерных пространствах волновых функций Вигнера-Баргмана (ВБ).
Функции ВБ не несут явной информации о релятивистских уравнениях для локальных полей (уравнения Дирака для полей спина $j = 1/2$, уравнений Прока для полей спина $j = 1$, или ур-ния Рариты-Швингера для полей спина $j = 3/2$,...).

В моем докладе я покажу, как релятивистские уравнения, описывающие динамику локальных полей произвольного спина, выводятся из первых принципов, а не постулируются.

Унитарное (массивное со спином j) НП $\mathcal{U}$ группы $ISL(2,\mathbb{C})$ действует в простр. волновых функций Вигнера-Баргмана (ВБ):

$$\phi_{\bar\alpha}(k) := \phi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2j})}(k)\ , \qquad \bar\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{2j})|_{\alpha_j=1,2}\ ,$$

– полностью симметричных тензоров ранга $2j$, зависящих от 4-импульса $k = (k_0, k_1, k_2, k_3)$ массивной частицы $(k_n k^n = \mathrm{m}^2 > 0)$. Действие дается известной формулой (записанной в импульсном представлении)

$$\boxed{\phi'_{\bar\alpha}(k) \equiv \mathcal{U}\big((A,X)\big)\cdot\phi_{\bar\alpha}(k) = \exp(ix^m k_m)\cdot\sum_{\bar\beta} T^{(j)}_{\bar\alpha\bar\beta}\big(h_{A,\Lambda^{-1}\cdot k}\big)\cdot\phi_{\bar\beta}(\Lambda^{-1}\cdot k),} \qquad (1)$$

Здесь $(A,X) = (A, x_m\sigma^m) \in ISL(2,\mathbb{C})$ и матрица $\Lambda \in SO^{\uparrow}(1,3)$ – образ элемента $A \in SL(2,\mathbb{C})$: $\boxed{A\cdot\sigma^m\cdot A^\dagger = \sigma^k\,\Lambda_k{}^m(A)}$. Матрица $T^{(j)}_{\bar\alpha\bar\beta}(h_{A,\Lambda^{-1}\cdot k})$ – это НП (спина j) унитарного элемента $h_{A,\Lambda^{-1}\cdot k}$ из подгруппы стабильности $SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$:

$$\boxed{h_{A,\Lambda^{-1}\cdot k} := A^{-1}_{(k)}\cdot A\cdot A_{(\Lambda^{-1}\cdot k)}\ \in\ SU(2)}\ ,$$

который определяется спец. элементами $A_{(k)}, A_{(\Lambda^{-1}\cdot k)}$, зависящими от k.

!!! Из (1) следует, что ВФ $\phi_{\bar\alpha}(k)$ не может быть локальным полем, так как матрица $T^{(j)}_{\bar\alpha\bar\beta}(h_{A,\Lambda^{-1}\cdot k})$ зависит от k !!!

Как перейти к локальным полям?

Подставим факторизованную форму

$$h_{A,\Lambda^{-1}\cdot k} = A_{(k)}^{-1} \cdot A \cdot A_{(\Lambda^{-1}\cdot k)}$$

в НП Вигнера (1) и для простоты зафиксируем сдвиговую матрицу $X = 0$. Тогда, если вместо волн. функции ВБ $\phi_{\bar{\alpha}}(k)$ ввести "одетую" ВФ

$$\boxed{\psi_{\bar{a}}(k) := \sum_{\bar{\alpha}} T^{(j)}_{\bar{a},\bar{\alpha}}(A_{(k)})\, \phi_{\bar{\alpha}}(k)}\ , \tag{2}$$

то операторы $A_{(k)}$, входящие в определение $h_{A,\Lambda^{-1}\cdot k}$, поглощаются в $\psi_{\bar{a}}(k)$ и НП Вигнера (1) переписывается как стандартное $SL(2,\mathbb{C})$ преобразование для локальных полей:

$$\psi'_{\bar{a}}(k) \equiv \mathcal{U}(A) \cdot \psi_{\bar{a}}(k) = \sum_{\bar{b}} T^{(j)}_{\bar{a}\bar{b}}(A)\, \psi_{\bar{b}}(\Lambda^{-1} \cdot k)\ . \tag{3}$$

Здесь матрица $T^{(j)}_{\bar{a}\bar{b}}(A)$ представления элемента $A \in SL(2,\mathbb{C})$ не зависит от k и поэтому "одетая волновая функция" $\psi_{\bar{a}}(k)$, заданная в (2), уже может рассматриваться как локальное поле.
Одевающие операторы $A_{(k)}$ и $T_{\bar{a},\bar{\alpha}}(A_{(k)})$ называются операторами Вигнера и содержат всю информацию о релятивистских ур-ниях.

Определение 1. Одевающие операторы $A_{(k)} \in SL(2,\mathbb{C})$ переводят тестовый импульс $q = (\mathrm{m},0,0,0)$ для покоящейся частицы в произвольный импульс k такой, что $(k)^2 = \mathrm{m}^2$:

$$\boxed{A_{(k)}\,(q_m\sigma^m)\,A^{\dagger}_{(k)} = (k_m\sigma^m)} \quad \Leftrightarrow \quad A^{\dagger -1}_{(k)}\,(q_m\tilde{\sigma}^m)\,A^{-1}_{(k)} = (k_m\tilde{\sigma}^m)\,, \tag{4}$$
$$\tilde{\sigma}^m := (I_2, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)\,.$$

Определение 2. Множество элементов $U \in SL(2,\mathbb{C})$, которые не меняют тестовый импульс

$$U\,(q_m\sigma^m)\,U^{\dagger} = (q_m\sigma^m)\,,$$

образует подгруппу стабильности G_q. В массивном случае $G_q = SU(2)$.

Замечание 1. В (4) матрица$A_{(k)} \in SL(2,\mathbb{C})$ фиксируется с точностью до умножения справа $A_{(k)} \to A_{(k)} \cdot U$ на элемент $U \in G_q$:

$$(A_{(k)}\cdot U)\cdot(q\sigma)\cdot(A_{(k)}\cdot U)^{\dagger} = A_{(k)}\cdot(U\cdot(q\sigma)\cdot U^{\dagger})\cdot A^{\dagger}_{(k)} = (k\sigma)\,.$$

Элементы $A_{(k)} \in SL(2,\mathbb{C})$ нумерую левые смежные классы в $SL(2,\mathbb{C})$ по подгруппе $G_q = SU(2)$, т.е. $A_{(k)}$ элементы однородного пр-ва$SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$.

Замечание 2. Определения (4) операторов $A_{(k)}$ переписываются в виде системы ур-ний:

$$\boxed{(k_m \sigma^m)\, A^{\dagger -1}_{(k)} = \mathrm{m}\, A_{(k)} \;, \qquad (k_m \tilde{\sigma}^m)\, A_{(k)} = \mathrm{m}\, A^{\dagger -1}_{(k)}} \;.$$

для одевающих операторов, которые определяют ур-ния для локальных полей

$$\psi_{\bar{a}}(k) = \sum_{\bar{\alpha}} T^{(j)}_{\bar{a},\bar{\alpha}}(A_{(k)})\, \phi_{\bar{\alpha}}(k) \;. \tag{5}$$

Прежде чем выписать эти уравнения отметим, что у $SL(2,\mathbb{C})$ имеется 2 неэквивалентных НП – определяющее и комплексно-сопряженное к нему, поэтому $SL(2,\mathbb{C})$-мульти-индекс $\bar{a}$ у локального поля (5) разбивается на две группы индексов (с точками и без точек):

$$\bar{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_r) \;, \qquad p + r = 2j \;.$$

Т.о., локальное поле $\psi^{(r)}_{\bar{a}}(k)$ имеет 2 типа индексов и его компоненты представляется в виде $\psi^{(r)(\dot\beta_1\dots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\dots\alpha_p)}(k)$. Здесь (r) фиксирует число точечных индексов.

Утверждение 1. *Локальные поля $\psi^{(r)}$, заданные в (5), удовлетворяют уравнениям Дирака-Паули-Фирца [P.A.M.Dirac (1936), M. Fierz and W. Pauli (1939)]:*

$$(k^n\,\sigma_n)\,\psi^{(r)}(k) = \mathrm{m}\,\psi^{(r-1)}(k)\,, \quad (k^n\,\tilde\sigma_n)\,\psi^{(r)}(k) = \mathrm{m}\,\psi^{(r+1)}(k) \quad \Longleftrightarrow$$

(восстановим индексы)

$$(k^n\sigma_n)_{\gamma_1\dot\beta_1}\psi^{(r)(\dot\beta_1\dots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\dots\alpha_p)}(k) = \mathrm{m}\,\psi^{(r-1)(\dot\beta_2\dots\dot\beta_r)}_{(\gamma_1\alpha_1\dots\alpha_p)}(k)\,, \quad (r=1,\dots,2j)\,,$$

$$(k^n\tilde\sigma_n)^{\dot\gamma_1\alpha_1}\psi^{(r)(\dot\beta_1\dots\dot\beta_r)}_{(\alpha_1\dots\alpha_p)}(k) = \mathrm{m}\,\psi^{(r+1)(\dot\gamma_1\dot\beta_1\dots\dot\beta_r)}_{(\alpha_2\dots\alpha_p)}(k)\,, \quad (r=0,\dots,2j-1)\,,$$

– *описывают динамику массивных релят. частиц со спином $j=(p+r)/2$.*

Операторы $A_{(k)}$ и $A^{\dagger-1}_{(k)}$ дают решения уравнений Дирака-Паули-Фирца!

Примеры. 1.) Для случая спина $j = 1/2$ мы имеем $(p + r) = 1$, т.е. $(r = 0, p = 1)$, $(r = 1, p = 0)$, и этот случай описывается двумя локальными вейлевскими спинорами $\psi^{(0)}_{\alpha}(k)$ и $\psi^{(1)\dot{\beta}}(k)$. Ур-ния ДПФ Из Утверждения 1 сводятся к двум вейлевским уравнениям

$$k^m (\tilde{\sigma}_m)^{\dot{\gamma}\alpha}\, \psi^{(0)}_{\alpha}(k) = \mathrm{m}\, \psi^{(1)\dot{\gamma}}(k)\ , \quad k^m (\sigma_m)_{\gamma\dot{\beta}}\, \psi^{(1)\dot{\beta}}(k) = \mathrm{m}\, \psi^{(0)}_{\gamma}(k)\ ,$$

которые для биспинора Дирака

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^{(0)}_{\alpha}(k) \\ \psi^{(1)\dot{\beta}}(k) \end{pmatrix}$$

объединяются в стандартное уравнение Дирака

$$k^m\, \gamma_m\, \Psi = \mathrm{m}\, \Psi\ , \qquad \gamma_m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \tilde{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}$$

и описывают массивные частицы со спином $\frac{1}{2}$.

2.) Для спина $j = 1$ мы имеем $(p + r) = 2j = 2$, т.е. $(r = 0, p = 2)$, $(r = 1, p = 1)$, $(r = 2, p = 1)$ и этот случай описывается 3-мя локальными полями $\psi^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2}(k)$, $\psi^{(1)\dot{\beta}}_{\alpha}(k)$ и $\psi^{(2)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}(k)$.

Поля $\psi^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2}$, $\psi^{(1)\dot\beta}_{\alpha}$ и $\psi^{(2)\dot\beta_1\dot\beta_2}$ подчиняются уравнениями ДПФ:

$$(k\tilde\sigma)^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi^{(0)}_{(\alpha_1\alpha_2)} = \mathrm{m}\,\psi^{(1)\dot\beta_1}_{\alpha_2}\,, \quad (k\tilde\sigma)^{\dot\beta_1\alpha_2}\,\psi^{(1)\dot\beta_2}_{\alpha_2} = \mathrm{m}\,\psi^{(2)\dot\beta_1\dot\beta_2}\,, \tag{6}$$

$$(k\sigma)_{\alpha_1\dot\beta_1}\,\psi^{(2)\dot\beta_1\dot\beta_2} = \mathrm{m}\,\psi^{(1)\dot\beta_2}_{\alpha_1}\,, \quad (k\sigma)_{\alpha_1\dot\beta_2}\,\psi^{(1)\dot\beta_2}_{\alpha_2} = \mathrm{m}\,\psi^{(0)}_{(\alpha_1\alpha_2)}\,. \tag{7}$$

Определим $A_n = (\tilde\sigma_n)^{\dot\beta\alpha}\psi^{(1)}_{\alpha\dot\beta}(k)$, тогда из вторых ур-ний (6), (7) имеем

$$\psi^{(0)}_{(\alpha\beta)}(k) = (\sigma_{mn})_{\alpha\beta}F^{(+)mn}(k)\,, \quad \psi^{(2)(\dot\alpha\dot\beta)}(k) = (\tilde\sigma_{mn})^{\dot\alpha\dot\beta}F^{(-)mn}(k)\,,$$

где $F^{(+)}_{mn}(k)$ и $F^{(-)}_{mn}(k)$ – самодуальные и антисамодуальные части тензора напряженности $F_{mn}(k) = k_mA_n - k_nA_m$. Из первых ур-ний в (6), (7) вытекают ур-ния Прока

$$\boxed{k^n\Big(k_nA_m(k) - k_mA_n(k)\Big) - \mathrm{m}^2A_m(k) = 0\,,}$$

3.) Аналогично, для случая $j = 3/2$ и $j = 2$ из ур-ний ДПФ получаются ур-ния Рариты-Швингера и ур-ния линеаризированной массивной гравитации.

См. детали в [A.P.I., M.A. Podoinitsyn, Nucl. Phys. B **929** (2018) 452, arXiv:1712.00833].

В случае $p + r = 2j$, система спин-тензорных полей $\psi^{(r)}$, которые подчиняются ур-ниям ДПФ формируют пространство НП группы $ISL(2, \mathbb{C})$ и описывают поля со спином $j = 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \ldots..$

Утверждение 2. Спин-тензорные локальные поля $\psi^{(r)(\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_r)}_{(\alpha_1 \ldots \alpha_p)}(k)$ типа $(\frac{p}{2}, \frac{r}{2})$, которые подчиняются ур-ниям ДПФ, автоматически удовлетворяют ур-ниям

$$(\hat{W}^m\, \hat{W}_m)\, \psi^{(r)}(k) = -\mathrm{m}^2 j(j+1)\, \psi^{(r)}(k)\ ,$$

где $j = (\frac{p}{2} + \frac{r}{2})$, $\hat{W}_m$ – компоненты вектора Паули-Любанского

$$\hat{W}_m = \frac{1}{2} \varepsilon_{mnij} M^{ij} P^n = \frac{1}{2} \varepsilon_{mnij} \hat{\Sigma}^{ij} P^n\ ,$$

$\hat{\Sigma}^{ij}$ — спиновая часть тензора углового момента M^{ij} и $\hat{W}_m \hat{W}^m$ – второй оператор Казимира группы $ISL(2, \mathbb{C})$.

Massless irreps. Stability subgroup.

For massless irreps we choose the test vector $q = \mathring{p} \in \mathbb{R}^{1,3}$ as follows

$$||\mathring{p}_\nu|| = (\mathring{p}_0, \mathring{p}_1, \mathring{p}_2, \mathring{p}_3) = (E, 0, 0, E) \tag{8}$$

By definition, the finite-dimensional Wigner operators are the matrices $A_{(p)} \in SL(2, \mathbb{C})$ that transform the test momentum $\mathring{p}$ into an arbitrary momentum p

$$A_{(p)}\, (\mathring{p}\, \sigma)\, A^\dagger_{(p)} = (p\, \sigma)\,, \tag{9}$$

where $(p\, \sigma) := p_\mu \sigma^\mu$. The stability subgroup $G_{\mathring{p}}$ of $\mathring{p}$ is formed by the set of matrices $h \in SL(2, \mathbb{C})$ that preserve $\mathring{p}$:

$$h\, (\mathring{p}\, \sigma)\, h^\dagger = (\mathring{p}\, \sigma)\,, \tag{10}$$

Equation (10) has the following general solution

$$h = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\theta} & e^{-\frac{i}{2}\theta}\, \mathbf{b} \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\theta} \end{pmatrix}\,, \tag{11}$$

where $\theta \in [0, 2\pi]$ and $\mathbf{b} = b_1 + ib_2$. The matrices (11) form the $ISO(2)$ group.

The unitary irreps of noncompact $ISO(2)$ group are infinite dimensional, act in the space of periodic functions and given by the relation

$$\Phi'(\varphi) \;=\; \Big[\mathcal{U}\big(h(\theta,\vec{b})\big)\,\Phi\Big](\varphi) \;=\; e^{-i\,\vec{b}\cdot\vec{t}_\varphi}\,\Phi(\varphi-\theta)\,. \tag{12}$$

In the massless case, Wigner induced unitary representations of the group $SL(2,\mathbb{C})$ realized on the space Wigner functions $\Phi(p,\varphi)$:

$$\Phi'(p,\varphi) \;:=\; [U(A)\Phi](p,\varphi) = \textstyle\sum_{\varphi'} \mathcal{D}_{\varphi\varphi'}(\theta_{A,\Lambda^{-1}p},\vec{b}_{A,\Lambda^{-1}p})\,\Phi(\Lambda^{-1}p,\varphi')\,. \tag{13}$$

The infinite dimensional matrix $\mathcal{D}_{\varphi\varphi'}(\theta_{A,\Lambda^{-1}p},\vec{b}_{A,\Lambda^{-1}p})$ depends on p_μ and $\Phi(p,\varphi)$ can not be local field. The local field $\Psi(p,y)$ is constructed from WF $\Phi(p,\varphi)$ via integral transformation

$$\Psi(p,\eta) \;=\; \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,\mathcal{A}(p;\eta,\varphi)\,\Phi(p,\varphi)\,, \tag{14}$$

where η is the set of auxiliary variables. The kernel $\mathcal{A}(p;\eta,\varphi)$ plays the role of the Wigner operator, which is an infinite-dimensional analogue of $A_{(k)}$ in massive case.

For the kernel $\mathcal{A}(p;\eta,\varphi)$ the variables η and φ plays the role of the $SL(2,\mathbb{C})$-type and $ISO(2)$-type continues indices.

From solutions for the Wigner operators $\mathcal{A}(p,\eta,\varphi)$, we obtain the relativistic field

$$\Psi(p,\eta) = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{A}(p,\eta,\varphi)\, \Phi(p,\varphi)\,, \tag{15}$$

and deduce the equation of motions of the local fields $\Psi(p,\eta)$, which are

$$(\eta \cdot p)\, \Psi(p,\eta) = 0\,. \tag{16}$$

$$[(\eta \cdot \eta) + 1]\, \Psi(p,\eta) = 0\,. \tag{17}$$

$$\left[i\,(p \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}) + \mu \right] \Psi(p,\eta) = 0\,. \tag{18}$$

Together with the massless condition $p^2\, \Psi(p,\eta) = 0$, the equations (16), (17), (18) are the Bargmann-Wigner equations for infinite spin fields depending on an additional vector variable η. Indeed, from eqs. (16), (17), (18) we have

$$\hat{W}^2 \Psi(p,\eta) = -\mu^2 \Psi(p,\eta)\,.$$

Helicity representations: $\mu \to 0$ ($\rho \to 0$)

For discrete basis, we use Fourier expansion of $\Phi(p, \varphi)$:

$$\Phi(p, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(p) e^{in\varphi} . \tag{19}$$

and the induced Wigner unitary representation of $SL(2, \mathbb{C})$ becomes

$$[U(A)\Phi]_n(p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_{nm}(\theta_{A,\Lambda^{-1}p}, \vec{b}_{A,\Lambda^{-1}p}) \, \Phi_m(\Lambda^{-1}p) \, , \tag{20}$$

where $\mathcal{D}_{nm}$ is the matrix of the little group element h in the discrete basis:

$$\mathcal{D}_{nm}(\theta, \vec{b}) = (-ie^{i\beta})^{m-n} \, e^{-im\theta} J_{(m-n)}(b\rho) \, , \tag{21}$$

the $\beta, b \in \mathbb{R}$ are the polar coordinates of $\vec{b} = b\,(\cos\beta, \sin\beta)$ and $J_{(n)}(x)$ are the Bessel functions of integer order. In the case of $\rho \to 0$ (equivalent to $\mu \to 0$) we have $J_{n-m}(0) = \delta_{nm}$ and the matrix element (21) is written as

$$\mathcal{D}_{nm}(\theta, \vec{b}) = \delta_{nm} e^{-in\theta} \, , \tag{22}$$

Заключение.

1.) На основе массивных унитарных представлений спинорной группы Пуанкаре $ISL(2,\mathbb{C})$ мы вывели релятивистские уравнения Дирака-Паули-Фирца и показали, что решениями этих уравнений являются элементы $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$.

2.) Наиболее интересные примеры в случае спинов $j = 1/2, 1, 3/2$ и $j = 2$ детально рассмотрены в [A.P.I., M.A.Podoinitsyn, Nucl. Phys. B929 (2018) 452; e-Print: 1712.00833 [hep-th]].

3.) Проблема: не известно как строить лагранжианы для уравнений ДПФ, описывающих массивные частицы высших спинов j. Связь с лагранжианами Синга-Хагена?

4.) Безмассовый случай рассматривается аналогично. См. [I.L.Buchbinder, A.P.I., M.A.Podoinitsyn, S.A.Fedoruk, Theor.Math.Phys. 216, 1 (2023) 973; e-Print: 2303.11852 [hep-th]].

5.) Было бы интересно применить этот подход к рассмотрению унитарных представлений супер алгебр и супергрупп Пуанкаре.