The XXV International Workshop-School

High Energy Physics and Quantum Field Theory QFTHEP'270

June 30 – July 5, 2025

Moscow, Russia

К.В.Степаньянц

Суперсимметричные модели теории поля

История открытия суперсимметрии

Письма в ЖЭТФ, том 13, стр. 452 – 455 *20 апреля 1971 г.*

РАСШИРЕНИЕ АЛГЕБРЫ ГЕНЕРАТОРОВ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ И НАРУШЕНИЕ P-ИНВАРИАНТНОСТИ

Ю. А. Гольфанд, Е. П. Лихтман

Одним из основных требований, накладываемых на квантовую теорию поля, является требование инвариантности теории относительно группы Пуанкаре [1]. Однако, лишь некоторая часть взаимодействий, удовлет-

решение, а отличны от нуля лишь операторы $W_1(t)$, $H_1(t)$, $H_2(t)$. Зная точный вид гамильтониана в представлении взаимодействия, можно восстановить по нему лагранжиан в гейзенберговском представлении:

$$L(x) = (\partial_\alpha \phi^* - igA_\alpha \phi^*)(\partial_\alpha \phi + igA_\alpha \phi) - m^2\phi^*\phi + (\partial_\alpha \omega^* - igA_\alpha \omega^*) \times$$

$$\times (\partial_\alpha \omega + igA_\alpha \omega) - m^2\omega^*\omega + \frac{i}{2}\psi_1\gamma_\alpha \overleftrightarrow{\partial}_\alpha \psi_1 - m\bar{\psi}_1\psi_1 - g\,\psi_1\gamma_\alpha\psi_1 A_\alpha +$$

$$+ \frac{i}{2}\bar{\psi}_2\gamma_\alpha\overleftrightarrow{\partial}_\alpha\psi_2 - \mu\bar{\psi}_2\psi_2 - \frac{1}{2}(\partial_\beta A_\alpha)^2 + \frac{\mu^2}{2}A_\alpha A_\alpha + \frac{1}{2}(\partial_\alpha \chi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\chi^2 +$$

$$+ g\mu(\phi^*\phi - \omega\omega^*)\chi - \frac{g^2}{2}(\phi^*\phi - \omega^*\omega)^2 + \sqrt{2}g(\bar{\phi}_1\bar{s}\psi_2\phi + \bar{\psi}_2\overset{+}{s}\psi_1\phi^*) -$$

$$- \sqrt{2}g(\psi_1^c\bar{s}\psi_2\omega^* + \bar{\psi}_2\bar{s}\psi_1^c\omega)\,. \qquad (7)$$

Таким образом, получена модель взаимодействия квантованных полей с несохранением четности, инвариантная относительно алгебры (1).

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10 марта 1971 г.

ным возможностям.

В начале 1968 г. я с красным дипломом закончил физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (МГУ). К этому времени я был соавтором двух публикаций [3, 4], посвященных возможным эффектам нарушения про-

---

FIELD THEORY INTERPRETATION OF SUPERGAUGES IN DUAL MODELS

J. -L. GERVAIS
Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Orsay, France *

and

B. SAKITA **
Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 91-Bures-sur-Yvette, France
and
Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Orsay, France

Received 13 August 1971

Письма в ЖЭТФ, том 16, вып. 11, стр. 621 – 624. *5 декабря 1972 г.*

О ВОЗМОЖНОМ УНИВЕРСАЛЬНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕЙТРИНО

Д.В.Волков, В.П.Акулов

В последнее время в физике элементарных частиц большое внимание уделяется вопросу о возможном вырождении вакуума и связанном с ним спонтанном нарушении той или иной симметрии. Наиболее непосредственным следствием вырождения вакуума является возникновение частиц с нулевой массой, так называемых голдстоуновских частиц [1].

621

Модель Весса–Зумино

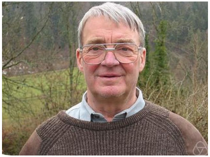
Nuclear Physics B70 (1974) 39–50. North-Holland Publishing Company

Consider a scalar multiplet of weight $\frac{1}{2}$. It consists of fields A, B, ψ, F, G transforming as in (8) with $n = \frac{1}{2}$. We claim that the Lagrangian

$$L = -\tfrac{1}{2}\partial_\mu A\,\partial^\mu A - \tfrac{1}{2}\partial_\mu B\,\partial^\mu B - \tfrac{1}{2} i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \tfrac{1}{2}(F^2 + G^2) \qquad (12)$$

gives rise to an invariant action integral. The Lagrangian is not itself invariant.

SUPERGAUGE TRANSFORMATIONS IN FOUR DIMENSIONS



J. WESS
Karlsruhe University

B. ZUMINO
CERN, Geneva

Received 5 October 1973

Действие простейшей версии модели Весса–Зумино записывается в виде

$$S = \int d^4x \left(\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right),$$

где φ — комплексный скаляр, а ψ — майорановский спинор ($\bar{\psi} = \psi^T C$). Оно инвариантно относительно преобразований, перемешивающих между собой бозонные и фермионные поля, приведенных на следующем слайде.

Инвариантность модели Весса–Зумино относительно преобразований суперсимметрии

Действие

$$S = \int d^4x \left(\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi\right)$$

(с точностью до поверхностных слагаемых) инвариантно относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta\varphi = \varepsilon(1+\gamma_5)\psi; \qquad \delta\psi = -i\Big(\partial_\mu \mathrm{Re}\,\varphi + i\gamma_5 \partial_\mu \mathrm{Im}\,\varphi\Big)\gamma^\mu \varepsilon,$$

где ε — грассманово нечетный (т.е. антикоммутирующий) майорановский спинор, не зависящий от координат пространства-времени, $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$. Это означае, что (в рассматриваемом случае) суперсимметрия является глобальной симметрией:

$$\delta S = \int d^4x \left(\partial_\mu \delta\varphi^* \partial^\mu \varphi + \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \delta\varphi + 2i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \delta\psi\right) = \int d^4x \Big\{\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)$$

$$\times\, \partial_\mu \psi\, \partial^\mu \varphi\, + \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\partial_\mu \psi\, \partial^\mu \varphi^* + 2\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \partial_\nu \Big(\mathrm{Re}\,\varphi + i\gamma_5 \mathrm{Im}\,\varphi\Big)\gamma^\nu \varepsilon\Big)\Big\}$$

$$= \int d^4x \Big\{ -\bar{\varepsilon}\psi\, \partial^2(\varphi+\varphi^*) + \bar{\varepsilon}\gamma_5\psi\, \partial^2(\varphi-\varphi^*) + 2\bar{\psi}\partial^2\Big(\mathrm{Re}\,\varphi - i\gamma_5 \mathrm{Im}\,\varphi\Big)\varepsilon\Big)\Big\} = 0.$$

Алгебра суперсимметрии

Если в модели Весса–Зумино вычислить коммутатор двух пребразований суперсимметрии, то получится, что

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]\varphi \equiv \delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2}\varphi - \delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1}\varphi = 2i\,(\bar\varepsilon_1\gamma^\mu\varepsilon_2)\,\partial_\mu\varphi;$$

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}](1+\gamma_5)\psi = 2i\,(\varepsilon_1\gamma^\mu\varepsilon_2)\,(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi - i(\varepsilon_1\gamma^\nu\varepsilon_2)\,(1+\gamma_5)\gamma_\nu(\gamma^\mu\partial_\mu\psi),$$

откуда можно заключить, что на массовой поверхности (когда $\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$)

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] = 2i\,(\bar\varepsilon_1\gamma^\mu\varepsilon_2)\,\partial_\mu.$$

Если считать, что преобразования суперсимметрии генерируются некоторым оператором Q, т.ч.

$$\delta_\varepsilon = -i\bar\varepsilon Q = -i\varepsilon_a C^{ab} Q_b,$$

то компоненты оператора Q будут удовлетворять антикоммутационным соотношениям

$$\{Q_a, Q_b\} = -2i(\gamma^\mu C)_{ab}\partial_\mu = -2(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu,$$

где $P_\mu = i\partial_\mu$ — генератор преобразований трансляции.

Преобразования суперсимметрии генерируются операторами суперзаряда Q_{ia}, где $i = 1, \ldots, \mathcal{N}$, а $a = 1, \ldots, 4$ — спинорный индекс. Число $\mathcal{N}$ всегда указывается в названиях суперсимметричных теорий и представляет собой число суперсимметрий, относительно которых инвариантна рассматриваемая модель. Операторы суперзаряда являются грассманово нечетными майорановскими спинорами

$$Q_i^+ \gamma^0 = Q_i^T.$$

Вместе с генераторами алгебры Пуанкаре

$$P_\mu = i\partial_\mu; \qquad M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu$$

они образуют Z_2-градуированную алгебру суперсимметрии. В простейшем случае она записываеся в виде

$$[P_\mu, P_\nu] = 0; \qquad [P_\mu, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\mu\alpha} P_\beta - \eta_{\mu\beta} P_\alpha);$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\nu\alpha} M_{\mu\beta} - \eta_{\nu\beta} M_{\mu\alpha} + \eta_{\mu\beta} M_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\alpha} M_{\nu\beta});$$
$$[Q_{ia}, P_\mu] = 0; \qquad [Q_{ia}, M_{\mu\nu}] = \frac{i}{2}(\gamma_{\mu\nu} Q_i)_a;$$
$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu.$$

Следствия алгебра суперсимметрии

Многие нетривиальные свойства суперсимметричных теорий могут быть установлены на основе исследования алгебры суперсимметрии и ее представлений. В частности, можно доказать, что

- Операторы суперзаряда меняют спиральность (или z-компоненту спина в массивном случае) на $1/2$, т.е. переводят бозонные состояния в фермионные.
- Число бозонных степеней свободы в суперсимметричных теориях равно числу фермионных степеней свободы.
- Энергия основного состояния (в теориях с глобальной суперсимметрией) является неотрицательной.
- Если суперсимметрия спонтанно не нарушена, то энергия основного состояния равна 0.
- Если суперсимметрия спонтанно нарушена, то энергия основного состояния строго больше 0.

Для того, чтобы сделать суперсимметрию явной (а также предъявить явные выражения для Q_{ia}), удобно использовать формализм т.н. суперпространства.

Суперпространство представляет собой пространство с координатами (x^μ, θ_i), где θ_i — вспомогательные грассманово нечетные майорановские спиноры, $\bar{\theta}_i = \theta_i^T C$. Функции, заданные на суперпространстве, называются суперполями. При действии на суперполя операторы суперзаряда имеют вид

$$Q_{ia} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_i^a} - (\gamma^\mu\theta_i)_a\partial_\mu,$$

а бесконечно малые преобразования суперсимметрии можно записать как

$$\delta\phi = -i\bar{\varepsilon}_i Q_i \phi(x^\mu, \theta_i).$$

Удобно определить суперсимметричную ковариантную производную

$$D_{ia} \equiv \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_i^a} - i(\gamma^\mu\theta_i)_a\partial_\mu,$$

которая, как несложно проверить, антикоммутирует с операторами суперзаряда

$$\{D_{ia}, Q_{jb}\} = 0$$

и позволяет накладывать суперсимметрично инвариантные связи.

$\mathcal{N}=1$ киральное скалярное суперполе

При $\mathcal{N}=1$ индекс i принимает только одно значение и поэтому далее не выписывается. $\mathcal{N}=1$ киральное скалярное суперполе по определению удовлетворяет условию связи

$$(1-\gamma_5)D_a\phi \equiv (1-\gamma_5)_a{}^b D_b\phi = 0.$$

Решение этого условия может быть компактно записано с использованием киральных координат

$$y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta$$

и имеет вид

$$\phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\, f(y^\mu),$$

где φ и f — комплексные скаляры, а ψ — майорановский спинор. В терминах обычных координат это выражение можно переписать в виде

$$\phi = \varphi(x) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(x) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\, f(x) + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\varphi(x)$$
$$-\frac{i}{2}(\bar\theta\theta)\bar\theta\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x),$$

причем все высшие степени θ (начиная с пятой) оказываются равными 0 в силу грассмановой нечетности (антикоммутативности).

Преобразования суперсимметрии компонент кирального скалярного суперполя

Бесконечно малые преобразования суперсимметрии компонент кирального скалярного суперполя получаются применением опрератора суперзаряда,

$$\delta\phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = \delta\varphi(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\delta\psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\,\delta f(y^\mu)$$
$$= -i\bar\varepsilon Q\phi = \Big(\bar\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu}\Big)\phi.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях θ, получаем, что

$$\delta\varphi = \bar\varepsilon(1+\gamma_5)\psi;$$
$$(1+\gamma_5)\delta\psi = (1+\gamma_5)\Big(f\varepsilon - i\gamma^\mu\varepsilon\,\partial_\mu\varphi\Big);$$
$$\delta f = -i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi.$$

Рассматривая аналогичным образом антикиральное суперполе

$$\phi^* = \varphi^*(y^{\mu *}) + \bar\theta(1-\gamma_5)\psi(y^{\mu *}) + \frac{1}{2}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta\, f^*(y^{\mu *}),$$

получаем, что $(1-\gamma_5)\delta\psi = (1-\gamma_5)\Big(f^*\varepsilon - i\gamma^\mu\varepsilon\partial_\mu\varphi^*\Big)$.

Таким образом, преобразования суперсимметрии компонент кирального суперполя принимают вид

$$\delta\varphi = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi;$$
$$\delta\psi = (\mathrm{Re}\, f + i\gamma_5 \mathrm{Im}\, f)\varepsilon - i\partial_\mu(\mathrm{Re}\,\varphi + i\gamma_5 \mathrm{Im}\,\varphi)\gamma^\mu\varepsilon;$$
$$\delta f = \partial_\mu\Big[-i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\psi\Big].$$

При этом видно, что старшая компонента f просто сдвигается на полную производную. Поэтому, если рассмотреть некоторое киральное суперполе

$$\boldsymbol{\phi}(y^\mu,(1+\gamma_5),\theta) = \boldsymbol{\varphi}(y^\mu) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\boldsymbol{\psi}(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\,\boldsymbol{f}(y^\mu),$$

то интеграл от его старшей компоненты $\boldsymbol{f}$ будет инвариантен относительно преобразований суперсимметрии с точностью до поверхностных слагаемых. Если при этом еще добавить комплекно сопряженное выражение, то получится вещественный инвариант

$$S_1 = 2\int d^4x\,\Big(\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{f}^*(x)\Big) = 2\int d^4x\,\Big(\boldsymbol{f}(x) + \text{к.с.}\Big),$$

где множитель 2 введен для удобства дальнейших обозначений.

Аналогично можно рассмотреть вещественное скалярное суперполе

$$\boldsymbol{V}(x,\theta) = \boldsymbol{V}^*(x^\mu,\theta) = \boldsymbol{C}(x) + \bar\theta\boldsymbol{\psi}(x) + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)\boldsymbol{K}(x)$$
$$+\frac{i}{2}(\bar\theta\gamma_5\theta)\boldsymbol{H}(x) - \frac{1}{2}(\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta)\boldsymbol{A}_\mu(x) + (\bar\theta\theta)\,\bar\theta\boldsymbol{\lambda}(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2\boldsymbol{D}(x).$$

Можно заметить, что старшая компонента (т.е. вещественное скалярное поле $\boldsymbol{D}(x)$) при преобразованиях суперсимметрии также сдвигается на полную производную. Это следует из того, что

$$\delta\boldsymbol{V}(x,\theta) = \ldots + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2\delta\boldsymbol{D}(x) = -i\bar\varepsilon Q\boldsymbol{V} = \Big(\bar\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + i\bar\varepsilon\gamma^\mu\theta\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big)\boldsymbol{V}(x^\mu,\theta),$$

а пятая степень θ равна 0 в силу грассмановой нечетности. После несложных преобразований можно убедиться, что

$$\delta\boldsymbol{D}(x) = \partial_\mu\big[-i\bar\varepsilon\gamma^\mu\boldsymbol{\lambda}(x)\big].$$

Поэтому (с точностью до поверхностных слагаемых) интеграл

$$S_2 = 2\int d^4x\,\boldsymbol{D}(x)$$

будет инвариантом относительно преобразований суперсимметрии.

Построение явно суперсимметричных действий с использованием суперпространства

Таким образом, действие, инвариантное относительно преобразований суперсимметрии с точностью до поверхностных слагаемых, можно записать в виде

$$S = 2\int d^4x\, \boldsymbol{D}(x) + \Big(2\int d^4x\, \boldsymbol{f}(x) + \text{к.с.}\Big).$$

Удобно переписать его в терминах суперполей, определяя интегралы по антикоммутирующим переменным следующим образом:

$$\int d^4\theta \equiv \frac{1}{8}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\Big)^2; \quad \int d^2\theta \equiv \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar\theta}; \quad \int d^2\bar\theta \equiv \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar\theta}.$$

Тогда действие, инвариантное относительно преобразований суперсимметрии, можно переписать в виде

$$S = \int d^4x\, d^4\theta\, \boldsymbol{V} + \Big(\int d^4x\, d^2\theta\, \boldsymbol{\phi} + \text{к.с.}\Big),$$

где $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^*$ — произвольное вещественное суперполе, а $\boldsymbol{\phi}$ — произвольное киральное суперполе, $(1-\gamma_5)D_a\boldsymbol{\phi} = 0$. Любая такая структура автоматически инвариантна относительно преобразований суперсимметрии.

Действие модели Весса–Зумино может быть записано в суперполевом виде, если выбрать $\boldsymbol{V} = \phi^*\phi/4$ и $\boldsymbol{\phi} = 0$, так что

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^*\phi.$$

В такой формулировке суперсимметрия является явной, но вид действия очень непривычен. Для нахождения его компонентной формы необходимо подставить компонентное разложение кирального суперполя

$$\phi = \varphi(x) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(x) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\, f(x) + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\varphi(x)$$
$$-\frac{i}{2}(\bar\theta\theta)\bar\theta\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial^2\varphi(x)$$

и вычислить интеграл по антикоммутирующим переменным с помощью равенств

$$\int d^4\theta\, \theta^\alpha \quad \text{при} \quad \alpha\le 3; \qquad \int d^4\theta\, (\bar\theta\theta)^2 = 8.$$

В результате получается выражение, которое уже приводилось ранее,

$$S = \int d^4x\, \Big(\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^*f\Big).$$

Модель Весса-Зумино с массой и взаимодействием

В действие модели Весса–Зумино можно добавить массу и взаимодействие, не нарушая суперсимметрию,

$$S=\frac{1}{4}\int d^4x\,d^4\theta\,\phi^*\phi+\left(\int d^4x\,d^2\theta\left[\frac{1}{4}m\phi^2+\frac{1}{6}\lambda\phi^3\right]+\text{к.с.}\right),$$

где m — постоянная с размерностью массы, а λ — безразмерная постоянная. Если (для простоты) выбрать их вещественными, то в компонентах

$$S=\int d^4x\,\Big(\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi+i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi+f^*f-m\bar\psi\psi+m\varphi f+\lambda\varphi^2 f$$
$$+m\varphi^* f^*+\lambda(\varphi^*)^2 f^*-\lambda\varphi\bar\psi(1+\gamma_5)\psi-\lambda\varphi^*\bar\psi(1-\gamma_5)\psi\Big).$$

Это действие квадратично по полям f и f^*, которые входят в него без производных. Такие поля называются вспомогательными и могут быть исключены с использованием уравнений движения,

$$S=\int d^4x\,\Big(\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi+i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m\bar\psi\psi-|m\varphi+\lambda\varphi^2|^2$$
$$-\lambda\varphi\bar\psi(1+\gamma_5)\psi-\lambda\varphi^*\bar\psi(1-\gamma_5)\psi\Big).$$

Видно, что массы скаляра и спинора оказываются одинаковыми, а потенциал скалярных полей — положительно определенным.

Попробуем теперь построить суперсимметричное расширение действия

$$S = \int d^4x\, D_\mu\varphi^* D^\mu\varphi,$$

где $D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + iA_\mu\varphi$ — ковариантная производная, а $A_\mu \equiv eA_\mu^A T^A$ — калибровочное поле. Векторное поле A_μ можно рассматривать как одну из компонент вещественного скалярного суперполя

$$V(x,\theta) = C(x) + i\bar\theta\,\gamma_5\xi(x) + \frac{1}{2}\bar\theta\theta\,K(x) + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma_5\theta\,H(x) - \frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x)$$
$$+\frac{1}{2}(\bar\theta\theta)\,\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\xi(x) + i\sqrt{2}(\bar\theta\theta)\bar\theta\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2\Big(D(x) - \frac{1}{2}\partial^2 C(x)\Big).$$

С его помощью можно построить действие

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\,\phi^+ e^{2V}\phi,$$

которое будет явно суперсимметрично, а также инвариантно относительно локальных калибровочных преобразований

$$\phi \to e^{i\Lambda}\phi; \qquad \phi^+ \to \phi^+ e^{-i\Lambda^+}; \qquad e^{2V} \to e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda},$$

параметризуемых произвольным киральным суперполем Λ.

Калибровочное суперполе

Число компонентных полей в калировочном суперполе $V(x,\theta)$ очень велико. Но также есть и много параметров калибровочных преобразований, являющихся компонентами кирального суперполя

$$\Lambda = \alpha(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\beta(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\,\gamma(y^\mu).$$

Оказывается, что, используя данный произвол, можно занулить некоторые компоненты суперполя $V(x,\theta)$. Проиллюстрируем это в абелевом случае, когда его калибровочное преобразование принимает вид

$$V \to V + \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda).$$

В терминах компонентных полей эти преобразования записываются как

$$\delta C = \mathrm{Im}\,\alpha; \qquad \delta\xi = -\beta; \qquad \delta K = \mathrm{Im}\,\gamma; \qquad \delta H = -\mathrm{Re}\,\gamma;$$
$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \mathrm{Re}\,\alpha; \qquad \delta\lambda = 0; \qquad \delta D = 0.$$

Из этих формул видно, что поля C, ξ, K и H можно занулить выбором параметров $\mathrm{Im}\,\alpha$, β, $\mathrm{Re}\,\gamma$ и $\mathrm{Im}\,\gamma$ соответственно.

Зануление полей C, ξ, K и H эквивалентно определенному выбору калибровки. Данная калибровка называется калибровкой Весса–Зумино. В ней калибровочное суперполе имеет вид

$$V_{\text{WZ}}(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar\theta\theta)\bar\theta\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 D(x).$$

При этом параметр Re $\alpha \equiv a$ остается свободным и генерирует остаточные калибровочные преобразования в калибровке Весса–Зумино. В абелевом случае они имеют вид

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu a$$

и совпадают с обычными калибровочными преобразованиями.
В неабелевом случае остаточная калибровочная инвариантность с параметром $\Lambda = a(y^\mu)$ генерирует преобразования

$$A_\mu \to \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega\partial_\mu\omega^{-1}; \qquad \lambda \to \omega\lambda\omega^{-1}; \qquad D \to \omega D\omega^{-1};$$
$$\varphi \to \omega\varphi; \qquad (1+\gamma_5)\psi \to \omega(1+\gamma_5)\psi; \qquad f \to \omega f,$$

где $\omega(x) \equiv \exp(ia(x)) = \exp(iea^A t^a) \in G$. Таким образом, для калибровочного поля получается обычный закон преобразования, а поля λ и D преобразуются по присоединенному представлению.

Калибровочно инвариантное обобщение модели Весса-Зумино в терминах компонентных полей

Подставляя компонентые разложения кирального суперполя и калибровочного суперполя в калибровке Весса–Зумино и вычисляя интеграл по антикоммутирующим переменным, выражение для действия может быть переписано в виде

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^+ e^{2V}\phi = \int d^4x\, \Big(D_\mu\varphi^+ D^\mu\varphi + i\bar\psi(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\psi$$

$$+ f^+ f + \varphi^+ D\varphi + i\sqrt{2}\,\bar\psi(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\sqrt{2}\,\varphi^+\bar\lambda(1+\gamma_5)\psi\Big).$$

Его калибровочная инвариантность очевидна.
В компонентной форме записи суперсимметрия не является явной, но, тем не менее, действие инвариантно относительно преобразований, перемешивающих бозонные и фермионные поля

$$\delta\varphi = \bar\varepsilon(1+\gamma_5)\psi; \qquad (1+\gamma_5)\delta\psi = (1+\gamma_5)(\varepsilon f - i\gamma^\mu\varepsilon D_\mu\varphi);$$

$$\delta f = -i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)D_\mu\psi - i\sqrt{2}\bar\varepsilon(1-\gamma_5)\lambda\varphi; \qquad \delta A_\mu = -i\sqrt{2}\bar\varepsilon\gamma_\mu\lambda;$$

$$\delta\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon D; \qquad \delta D = \sqrt{2}\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma_5 D_\mu\lambda.$$

Обычный тензор напряженности калибровочного поля имеет вид

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$$

и при калибровочных преобразованиях меняется по закону $F_{\mu\nu} \to \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1}$. Суперсимметричным аналогом данной величины является суперполе

$$W_a \equiv \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5) D\Big(e^{-2V}(1+\gamma_5) D_a e^{2V}\Big).$$

Оно является вейлевским (правым) спинором, т.к. $(1-\gamma_5)_a{}^b W_b = 0$, а также удовлетворяет условию киральности $(1-\gamma_5) D_b W_a = 0$. При калибровочных преобразованиях оно меняется по закону

$$W_a \to e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda}$$

и в качестве одной из компонент содержит $F_{\mu\nu}$. В частности, в калибровке Весса–Зумино оно записывается в виде

$$W_a = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Big\{-i\sqrt{2}\lambda_a(y) - \theta_a D(y) + \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\theta_a F_{\mu\nu}(y) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\,\gamma^\mu D_\mu \lambda_a(y)\Big\},$$

где $D_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + i[A_\mu, \lambda]$ — ковариантная производная поля калибрино.

$\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса

Действие $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса должно быть квадратично по тензору поля и быть лоренц- и калибровочно инвариантным. В терминах суперполей его можно записать в виде

$$S = \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W^a W_a,$$

где $W^a \equiv W_b C^{ba}$. После взятия интеграла по антикомутирующим переменным в калибровке Весса–Зумино данное действие принимает вид

$$S = \frac{2}{e^2}\mathrm{tr}\int d^4x\,\Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar\lambda\gamma^\mu D_\mu\lambda + \frac{1}{2}D^2\Big)$$

и является инвариантным относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta A_\mu = -i\sqrt{2}\bar\varepsilon\gamma_\mu\lambda;\qquad \delta\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon D;\qquad \delta D = \sqrt{2}\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma_5 D_\mu\lambda.$$

При этом для доказательства инвариантности очень существенным оказывается тождество

$$(C\gamma^\mu)^{ab}(C\gamma_\mu)^{cd} + (C\gamma^\mu)^{ac}(C\gamma_\mu)^{db} + (C\gamma^\mu)^{ad}(C\gamma_\mu)^{bc} = 0.$$

$\mathcal{N}=1$ суперсимметричная КХД

Построим теперь суперсимметричное обобщение действия квантовой хромодинамики (КХД)

$$S=\int d^4x\,\Big(-\frac{1}{2e^2}\mbox{tr}\,F_{\mu\nu}^2+i\bar\Psi\gamma^\mu D_\mu\Psi-m\bar\Psi\Psi\Big),$$

где Ψ — дираковский спинор в некотором представлении R калибровочной группы G. Дираковский спинор можно построить из двух майорановских спиноров ψ и $\widetilde\psi$ как

$$\Psi=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big((1+\gamma_5)\psi+(1-\gamma_5)\widetilde\psi\Big).$$

Поэтому для построения теории, содержащей дираковский спинор, необходимо взять 2 киральных скалярных суперполя ϕ и $\widetilde\phi$, которые лежат в представлениях R и $\bar R$ группы G. С их помощью действие $\mathcal{N}=1$ СКХД можно записать в (явно суперсимметричном) суперполевом виде

$$S=\frac{1}{2e^2}\mbox{Re}\,\mbox{tr}\int d^4x\,d^2\theta\,W^aW_a+\frac{1}{4}\int d^4x\,d^4\theta\,\Big(\phi^+e^{2V}\phi+\widetilde\phi^+e^{-2V^T}\widetilde\phi\Big)$$
$$+\Big(\frac{1}{2}m\int d^4x\,d^2\theta\,\widetilde\phi^T\phi+\mbox{к.с.}\Big),$$

где было учтено, что генераторы взаимно сопряженных представлений отличаются на знак и транспонирование.

Рассматриваемая теория инвариантна относительно калибровочных преобразований, которые в суперполевой форме записываются в виде

$$\phi \to e^{i\Lambda}\phi; \qquad \widetilde{\phi} \to e^{-i\Lambda^T}\widetilde{\phi}; \qquad e^{2V} \to e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda}; \qquad W_a \to e^{i\Lambda}W_a e^{-i\Lambda},$$

параметризуемых киральным суперполем $\Lambda = e\Lambda^A T^A$ (или $\Lambda = e\Lambda^A t^A$). После исключения вспомогательных полей f, $\widetilde{f}$ и D выражение для действия в терминах компонентных полей может быть записано в виде

$$S = \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^A)^2 + i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + i\lambda^A\gamma^\mu D_\mu\lambda^A + D_\mu\varphi^+$$
$$\times D^\mu\varphi + D_\mu\widetilde{\varphi}^+ D^\mu\widetilde{\varphi} - m^2\varphi^+\varphi - m^2\widetilde{\varphi}^+\widetilde{\varphi} - \frac{e^2}{2}\Big(\varphi^+T^A\varphi - \widetilde{\varphi}^T T^A\widetilde{\varphi}^*\Big)^2$$
$$+ i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi - i\widetilde{\varphi}^T\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi + i\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\widetilde{\varphi}^*\Big\}.$$

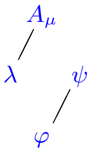
Из него видно, что массы суперпартнеров совпадают, а потенциал скалярных полей является положительно определенным. Все это является характерными особенностями суперсимметричных теорий.

Теории с расширенной суперсимметрией

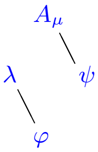
Теории с $\mathcal{N}=1$ называются теориями с нерасширенной суперсимметрией, а теории с $\mathcal{N}\geq 2$ — теориями с расширенной суперсимметрией.

Построим вначале $\mathcal{N}=2$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса.

Анализ представлений алгебры суперсимметрии показывает, что в ней есть векторное поле A_μ, 2 майорановских спинора λ и ψ, а также комплексный скаляр φ. Мы ищем такую теорию в классе $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных теорий — как $\mathcal{N}=1$ SYM + модель Весса–Зумино. Тогда две суперсимметрии действуют так:



явная суперсимметрия



скрытая суперсимметрия

Ясно, что спинор ψ может перемешиваться с калибровочным полем только, если он лежит в присоединенном представлении и входит в действие симметрично с λ.

$\mathcal{N}=2$ суперсимметричная теория Янга–Миллса представляет собой $\mathcal{N}=1$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса, взаимодействующую с моделью Весса-Зумино в присоединенном представлении. Для полей в присоединенном представлении существует два типа обозначений

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \qquad (\mathcal{D}_\mu\varphi)^A = \partial_\mu\varphi^A - ef^{ABC}A_\mu^B\varphi^C \qquad \varphi = e\varphi^A t^A$$

$\mathcal{D}_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + iA_\mu\varphi$	$\mathcal{D}_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + i[A_\mu,\varphi]$
$e^{2V}\phi = \phi + 2V\phi + \dfrac{1}{2!}(2V)^2\phi + \ldots$	$\phi + [2V,\phi] + \dfrac{1}{2!}[2V,[2V,\phi]] + \ldots = e^{2V}\phi e^{-2V}$
$\phi^+\phi = \phi^{A*}\phi^A$	$\phi^{A*}\phi^A = \dfrac{2}{e^2}\mathrm{tr}(\phi^+\phi)$
$\dfrac{1}{4}\phi^+e^{2V}\phi$	$\dfrac{1}{2e^2}\mathrm{tr}(\phi^+e^{2V}\phi e^{-2V})$

Далее мы используем обозначение $\phi = e\phi^A t^A$, чтобы была видна симметрия между спинорами λ и ψ. Тогда действие $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса запишется в виде

$$S = \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W^a W_a + \frac{1}{2e^2}\mathrm{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V}\Phi e^{-2V}.$$

В калибровке Весса–Зумино после исключения вспомогательных полей данное действие можно записать в явно $SO(2)$ инвариантной форме

$$S = \frac{2}{e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,\Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar\psi_i\gamma^\mu D_\mu\psi_i + \frac{1}{2}(D_\mu P)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu S)^2$$
$$+\frac{1}{2}[P,S]^2 - i\varepsilon_{ij}P\{\bar\psi_i,\psi_j\} - \varepsilon_{ij}S\{\bar\psi_i,\gamma_5\psi_j\}\Big).$$

Здесь индексы i и j пробегают значения 1 и 2, причем $\psi_1\equiv\lambda$, $\psi_2\equiv\psi$, а также были использованы обозначения

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(P+iS),\quad \text{где}\quad P^+ = P,\quad S^+ = S.$$

Наличие одной суперсимметрии и $SO(2)$ инвариантности гарантирует существование двух суперсимметрий

$$\delta A_\mu = -i\sqrt{2}\bar\varepsilon_i\gamma_\mu\psi_i;\qquad \delta\varphi = \varepsilon_{ij}\bar\varepsilon_i(1+\gamma_5)\psi_j$$
$$(1+\gamma_5)\delta\psi_i = (1+\gamma_5)\Big(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon_i F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_i[\varphi^+,\varphi] + i\varepsilon_{ij}D_\mu\varphi\gamma^\mu\varepsilon_j\Big)$$

с параметрами $\varepsilon_i \ne \varepsilon_i(x)$.

$\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные теории

Потенциал скалярных полей оказывается равным

$$V(P,S) = -\frac{1}{e^2}\mathrm{tr}([P,S]^2) = \frac{e^2}{2}(f^{ABC}P^B S^C)^2 \geq 0$$

и (как и должно быть в суперсимметричном случае) положительно определен. Заметим, что он содержит плоское направление $P = S$, т.е. $V(P,P) = 0$.

Можно ли построить теории с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией без калибровочного поля? Оказывается, что можно. Для этого необходимо взять два киральных скалярных суперполя ϕ_1 и ϕ_2 в представлениях R и $\overline{R}$ некоторой группы G. Тогда две суперсимметрии будут действовать следующим образом:

явная суперсимметрия — скрытая суперсимметрия

Совокупность суперполей ϕ_1 и ϕ_2 называется $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплетом.

Оказывается, что можно построить $\mathcal{N}=2$ суперсимметричное взаимодействие $\mathcal{N}=2$ SYM с гипермультиплетом,

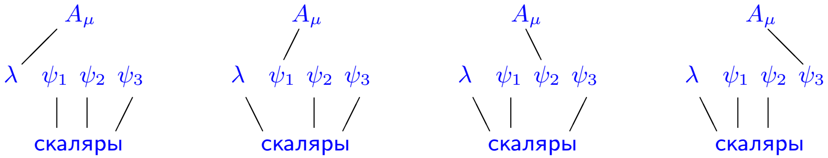
$$S = \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W^a W_a + \frac{1}{2e^2}\mathrm{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V}\Phi e^{-2V}$$
$$+\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Big(\phi_1^+ e^{2V}\phi_1 + \phi_2^+ e^{-2V^T}\phi_2\Big) + \Big\{\int d^4x\, d^2\theta\Big(\frac{1}{2}m\phi_2^T\phi_1$$
$$+\frac{i}{\sqrt{2}}\phi_2^T\Phi\phi_1\Big) + \text{к.с.}\Big\}$$

При этом коэффициент $i/\sqrt{2}$ определяется из требования, чтобы спиноры λ и ψ входили в действие симметрично. Рассматриваемая теория инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$e^{2V} \to e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda};\qquad \Phi\to e^{i\Lambda}\Phi e^{-i\Lambda};\qquad \phi_1\to e^{i\Lambda}\phi_1;\qquad \phi_2\to e^{-i\Lambda^T}\phi_2$$

и двух преобразований суперсимметрии. Видно, что суперполя материи лежат в приводимом представлении $Adj+R+\overline{R}$, а, следовательно, рассматриваемая теория не является киральной. Поэтому теории с расширенной суперсимметрией обычно не используются при построении суперсимметричных расширений Стандартной модели.

Можно также построить суперсимметричное расширение теории Янга–Миллса, инвариантное относительно 4-х различных преобразований суперсимметрии. Данная теория получается, если $\mathcal{N}=2$ суперсимметричная теория Янга–Миллса взаимодействует с гипермультиплетом в присоединенном представлении. В ней имеется 4 майорановских спинора и каждая из 4-х суперсимметрий перемешивает калибровочное поле со своим спинором:



Действие такой теории можно записать в терминах $\mathcal{N}=1$ суперполей,

$$S=\frac{1}{2e^2}\mathrm{tr}\Big\{\mathrm{Re}\int d^4x\,d^2\theta\,W^aW_a+\int d^4x\,d^4\theta\,\phi_i^+e^{2V}\phi_ie^{-2V} \\ +\Big(\frac{i\sqrt{2}}{3}\int d^4x\,d^2\theta\,\varepsilon_{ijk}\phi_i[\phi_j,\phi_k]+\text{к.с.}\Big)\Big\},$$

где индексы i, j, k пробегают значения от 1 до 3. В этом случае одна суперсимметрия и глобальная $SO(3)$-симметрия являются явными.

$\mathcal{N}=4$ суперсимметричная теория Янга-Миллса

В калибровке Весса–Зумино после исключения вспомогательных полей действие можно записать в явно $SO(4)$ инвариантном виде

$$S=\frac{2}{e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,\Big\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2+i\bar\psi_I\gamma^\mu D_\mu\psi_I+\frac{1}{8}(D_\mu P_{IJ})^2+\frac{1}{8}(D_\mu S_{IJ})^2-iP_{IJ}$$

$$\times\{\bar\psi_I,\psi_J\}+S_{IJ}\{\bar\psi_I,\gamma_5 S_J\}+\frac{1}{64}[P_{IJ},P_{KL}]^2+\frac{1}{64}[S_{IJ},S_{KL}]^2+\frac{1}{32}[P_{IJ},S_{KL}]^2\Big\},$$

где индексы пробегают значения от 1 до 4, и использованы обозначения

$$\psi_I\equiv\left\{\begin{array}{ll}\psi_i, & I=i=1,\ldots,3\\ \lambda, & I=4\end{array}\right.;\qquad \varphi_i\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(P_i+iS_i);$$

$$P_{ij}\equiv\varepsilon_{ijk}P_k;\qquad P_{i4}\equiv-P_{4i}\equiv-P_i;$$
$$S_{ij}\equiv\varepsilon_{ijk}S_k;\qquad S_{i4}\equiv-S_{4i}\equiv S_i.$$

Эти структуры получаются из $SO(4)$ инвариантных условий связи

$$P_{IJ}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{IJKL}P_{KL};\qquad S_{IJ}=\frac{1}{2}\varepsilon_{IJKL}S_{KL}.$$

Наличие $\mathcal{N}=1$ суперсимметрии и глобальной $SO(4)$ симметрии очевидно приводит к существованию $\mathcal{N}=4$ суперсимметрии.

$\mathcal{N}=1$ супергравитация

Также можно построить различные суперсимметричные расширения теории гравитации. При этом у гравитона (имеющего спин 2) возникает суперпартнер(ы) спина 3/2 — т.н. гравитино. Оно описываеся полем ψ_μ, удовлетворяющим условию $\bar\psi_\mu = \psi_\mu^T C$. Действие простейшей $\mathcal{N}=1$ супергравитации зависит от полей тетрады $e_{m\mu}$ и гравитино и имеет вид

$$S = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}R\,(e,\omega(e,\psi)) \\ +\frac{1}{2}\int d^4x\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\bar\psi_\mu e_{n\nu}\gamma^n\gamma_5\nabla_\alpha(e,\omega(e,\psi))\psi_\beta,$$

где $k\equiv\sqrt{8\pi G}$ — параметр размерности m^{-1}. При этом ковариантная производная поля гравитино имеет вид

$$\nabla_\alpha(e,\omega(e,\psi))\psi_\beta \equiv \partial_\alpha\psi_\beta - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(e)\psi_\sigma + \frac{1}{4}\omega_{\alpha mn}(e,\psi)\gamma^{mn}\psi_\beta,$$

где связность также содержит слагаемые, квадратичные по полю гравитино,

$$\omega_{\mu mn}(e,\psi) = \omega_{\mu mn}(e) - \frac{ik^2}{4}\Big(\bar\psi_m\gamma_\mu\psi_n + \psi_\mu\gamma_m\psi_n - \psi_\mu\gamma_n\psi_m\Big).$$

$\mathcal{N} = 1$ супергравитация

Можно показать, что такая теория будет инвариантна относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta e^m{}_\mu = -ik\,\bar{\varepsilon}\gamma^m\psi_\mu;$$
$$\delta\psi_\mu = \frac{2}{k}\nabla_\mu(e,\psi)\varepsilon = \frac{2}{k}\Big(\partial_\mu\varepsilon + \frac{1}{4}\omega_{\mu mn}(e,\psi)\gamma^{mn}\varepsilon\Big),$$

параметризуемых майорановским спинором $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Таким образом, при наличии гравитации суперсимметрия становится локальной симметрией.

Также можно построить теории, описывающие взаимодействие $\mathcal{N} = 1$ супергравитации с киральными и векторными супермультиплетами. Соответствующее действие является очень сложным и здесь не приводится.

Существуют и расширенные теории супергравитации. При этом максимально расширенной является $\mathcal{N} = 8$ супергравитация (которая, в частности, содержит 8 полей гравитино и инвариантна относительно 8 различных преобразований суперсимметрии). При больших значениях $\mathcal{N}$ в теории появляется частица спина $5/2$, для которой не удается построить взаимодействие с гравитационным полем.

Перенормируемые неабелевы $\mathcal{N}=1$ суперсимметричные калибровочные теории на классическом уровне описываются действием

$$S=\frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,d^2\theta\,W^aW_a+\frac{1}{4}\int d^4x\,d^4\theta\,\phi^{*i}(e^{2V})_i{}^j\phi_j$$
$$+\Big\{\int d^4x\,d^2\theta\,\Big(\frac{1}{4}m_0^{ij}\phi_i\phi_j+\frac{1}{6}\lambda_0^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k\Big)+\text{к.с.}\Big\}.$$

Важно, что для получения перенормируемости суперпотенциал должен иметь не более, чем третью степень по киральным суперполям.

Квантование суперсимметричных теорий может быть сделано в терминах суперполей. Из анализа соответствующих правил Фейнмана была получена

Теорема о неперенормировке: Суперпотенциал не получает расходящихся квантовых поправок.

Как следствие, перенормировка масс и юкавских констант оказывается связанной с перенормировкой киральных суперполей материи. А именно, если $\phi_i=(\sqrt{Z})_i{}^j\phi_{R,j}$, то

$$m^{ij}=m_0^{kl}(\sqrt{Z})_k{}^i(\sqrt{Z})_l{}^j;\qquad \lambda^{ijk}=\lambda_0^{mnp}(\sqrt{Z})_m{}^i(\sqrt{Z})_n{}^j(\sqrt{Z})_p{}^k.$$

Точная NSVZ β-функция

К теоремам о неперенормировке можно также отнести т.н. точную β-функцию Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова (NSVZ)

V.Novikov, M.A.Shifman, A.Vainshtein, V.I.Zakharov, Nucl.Phys. **B 229** (1983) 381; Phys.Lett. **B 166** (1985) 329; M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, Nucl.Phys. **B 277** (1986) 456; D.R.T.Jones, Phys.Lett. **B 123** (1983) 45.

которая представляет собой соотношение между β-функцией и аномальной размерностью суперполей материи в $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных калибровочных теориях,

$$\beta(\alpha,\lambda) = -\frac{\alpha^2\Big(3C_2 - T(R) + C(R)_i{}^j\gamma_j{}^i(\alpha,\lambda)/r\Big)}{2\pi(1-C_2\alpha/2\pi)}.$$

Здесь α и λ — калибровочная и юкавские константы связи соответственно, и мы используем обозначения

$$\mathrm{tr}\,(T^A T^B) \equiv T(R)\,\delta^{AB}; \qquad (T^A)_i{}^k (T^A)_k{}^j \equiv C(R)_i{}^j;$$

$$f^{ACD} f^{BCD} \equiv C_2 \delta^{AB}; \qquad r \equiv \delta_{AA} = \dim G.$$

Квантовые свойства суперсимметричных теорий

Наибольшее улучшение ультрафиолетового поведения происходит в теориях с расширенной ($\mathcal{N} \geq 2$) суперсимметрией.

- В $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных теориях киральные суперполя материи не перенормируются, а калибровочная константа связи получает расходящиеся квантовые поправки только в однопетлевом приближении.
- $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса является полностью конечной.
- Можно построить конечные $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные калибровочные теории, подобрав калибровочную группу и представление для суперполей материи так, чтобы сокращались однопетлевые расходимости.
- Также обсуждаются конечные $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричные теории и конечные теории с мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией.
- Теории супергравитации (за исключением, возможно, максимально расширенной $\mathcal{N} = 8$ супергравитации) оказываются неперенормируемыми по индексу расходимости.

Спонтанное нарушение суперсимметрии

В теориях с ненарушенной суперсимметрией массы суперпартнеров оказываются одинаковыми. Однако в реальном мире это не так. Массы суперпартнеров могут быть сделаны различными, если спонтанно нарушить суперсимметрию. Другими словами, теория должна быть суперсимметричной, а вакуумное состояние — нет.

Известны два критерия спонтанного нарушения (глобальной) суперсимметрии:

- Ваккумная энергия должна быть строго положительна.
- Вакуумное среднее хотя бы одно вспомогательного поля (f или D) должно быть отлично от 0.

Известен ряд примеров простых теорий со спонтанно нарушенной суперсимметрией, и массы суперпартнеров в них действительно оказываются различными. Однако из алгебры суперсимметрии следует ограничение

$$\sum_{\text{бозоны}} n_{\text{Б}} m_{\text{Б}}^2 = \sum_{\text{фермионы}} n_{\Phi} m_{\Phi}^2,$$

где n — число степеней свободы, а m — масса. Но в реальном мире бозоны тяжелее (из-за суперпартнеров). Поэтому (в простейших моделях) это ограничение плохо согласуется с экспериментом.

Построить реалистичный механизм спонтанного нарушения суперсимметрии очень сложно. Поэтому в простейших моделях используется т.н. мягкое нарушение суперсимметрии. При мягком нарушении суперсимметрии в теорию добавляются несуперсимметричные слагаемые, которые не вносят в теорию квадратичные расходимости. Существует 4 типа таких слагаемых, которые можно записать в терминах суперполей и шпуриона

$$\eta \equiv \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta$$

следующим образом:

$$-m^2\int d^4x\,\varphi^+\varphi = -\frac{1}{4}m^2\int d^4x\,d^4\theta\,\eta^*\eta\,\phi^+e^{2V}\phi;$$

$$-(m^2)^{ij}\int d^4x\,\varphi_i\varphi_j = -\frac{1}{2}(m^2)^{ij}\int d^4x\,d^2\theta\,\eta\,\phi_i\phi_j;$$

$$-m^{ijk}\int d^4x\,\varphi_i\varphi_j\varphi_k = -\frac{1}{2}m^{ijk}\int d^4x\,d^2\theta\,\eta\,\phi_i\phi_j\phi_k;$$

$$-m\int d^4x\,\bar\lambda^A\lambda^A = \frac{1}{2}m\,\mathrm{Re}\int d^4x\,d^2\theta\,\eta\,W_a^A C^{ab} W_b^B.$$

Такие мягкие слагаемые могут возникать как остаток от спонтанного нарушения суперсимметрии.

Как оказалось, суперсимметрия является одним из наиболее вероятных кандидатов на описание физики за рамками Стандартной модели. Простейшим суперсимметричным расширением Стандартной модели является МССМ. МССМ является теорией с мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией и калибровочной группой $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Поэтому в ней имеются 3 калибровочные константы связи e_3, e_2, и e_1 (их число равно числу сомножителей в калибровочной группе). Кварки, лептоны и хиггсовские поля являются компонентами киральных суперполей материи:

Суперполе	SU_3	SU_2	$U_1\ (Y)$	Суперполе	SU_3	SU_2	$U_1\ (Y)$
$3 \times Q$	$\bar{3}$	2	$-1/6$	$3 \times N$	1	1	0
$3 \times U$	3	1	$2/3$	$3 \times E$	1	1	-1
$3 \times D$	3	1	$-1/3$	H_d	1	2	$1/2$
$3 \times L$	1	2	$1/2$	H_u	1	2	$-1/2$

где

$$Q = \begin{pmatrix} \widetilde{U} \\ \widetilde{D} \end{pmatrix}; \qquad L = \begin{pmatrix} \widetilde{N} \\ \widetilde{E} \end{pmatrix}.$$

Действие МССМ является достаточно громоздким, но может быть представлено как сумма нескольких характерных частей,

$$S_{\text{МССМ}} = S_{\text{SYM}} + S_{\text{matter}} + S_{\text{superpotential}} + S_{\text{soft}}.$$

При этом S_{SYM} — действие для трех $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса с группами $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$;

S_{matter} — сумма калибровочно инвариантных обобщений модели Весса–Зумино для всех суперполей материи;

$S_{\text{superpotential}}$ — часть действия, включающая суперпотенциал W,

$$S_{\text{superpotential}} = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, W + \text{к.с.},$$

где

$$W = (Y_U)_{IJ} \left(\widetilde{U}\ \widetilde{D}\right)^a_I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{u1} \\ H_{u2} \end{pmatrix} U_{aJ} + (Y_D)_{IJ} \left(\widetilde{U}\ \widetilde{D}\right)^a_I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{d1} \\ H_{d2} \end{pmatrix}$$
$$\times D_{aJ} + (Y_E)_{IJ} \left(\widetilde{N}\ \widetilde{E}\right)_I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{d1} \\ H_{d2} \end{pmatrix} E_J + \boldsymbol{\mu}\,(H_{u1}\ H_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{d1} \\ H_{d2} \end{pmatrix}.$$

S_{soft} — сумма слагаемых, мягко нарушающих суперсимметрию.

Несмотря на то, что в настоящее время суперсимметрия еще не обнаружена экспериментально, уже имеется целый ряд косвенных свидетельств, что она реализуется в физике высоких энергий, например, объединение бегущих констант связи, согласующееся с предсказаниями теорий Великого объединения.

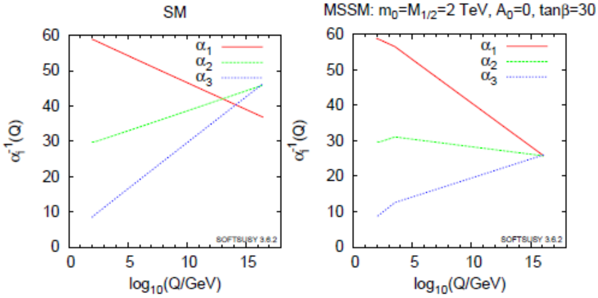


Figure 94.1: Running couplings in SM and MSSM using two-loop RG evolution. The SUSY threshold at 2 TeV is clearly visible on the MSSM side. (We thank Ben Allanach for providing the plots created using SOFTSUSY [61].)

Также имеется и ряд других привлекательных свойств суперсимметричных теорий по сравнению со Стандартной моделью.

Другие характерные предсказания МССМ

По сравнению со Стандартной моделью МССМ имеет ряд интересных особенностей:

- Объединение бегущих констант связи, согласующееся с предсказаниями теорий Великого объединения.
- Отсутствие квадратичных расходимостей к массе хиггсовского бозона и необходимости ее точной подстройки на масштабе Великого объединения.
- Наличие частиц-суперпартнеров (бозоны для фермионов и фермионы для бозонов) с достаточно большими массами.
- Наличие 5 хиггсовских бозонов, 3 из которых являются электрически нейтральными, а 2 имеют заряды $\pm e$.
- Малость массы легчайшего хиггсовского бозона (без учета квантовых поправок его масса должна быть меньше массы Z-бозона). Квантовые поправки позволяют получить правильное значение массы.
- Стабильность легчайшего суперпартнера, который оказывается вероятным кандидатом на роль темной материи.

Заключение

- Суперсимметрия представляет собой симметрию, перемешивающую между собой бозонные и фермионные поля.
- Суперсимметрия может быть сделана явной при использовании формализма суперпространства, в котором вводятся дополнительные вспомогательные антикоммутирующие координаты θ.
- В компонентной формулировке суперсимметрия не очевидна и должна проверяться. Переход от суперпространственной к компонентной формулировке осуществляется с помощью взятия интегралов по антикоммутирующим переменным θ.
- В суперсимметричных теориях ультрафиолетовое поведение намного лучше, чем в несуперсимметричном случае.
- Суперсимметричные калибровочные теории являются основой для построения моделей, (вероятно) описывающих физику за пределами Стандартной модели.
- В реалистичных моделях суперсимммeтрия должна быть нарушена.
- Построение суперсимметричного описания мира еще далеко не закончено.

Благодарю за внимание!