The equations of quantum theory in the space of random joint events

Alexander Biryukov

Samara State University
General and Theoretical Physics Department

The XXII International Workshop
High Energy Physics and Quantum Field Theory
June 24 — July 1, 2015
Samara, Russia

$$\psi(\mathbf{r}_f, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}_f, \mathbf{r}_1)} \exp[\frac{\imath}{\hbar}Et] \exp[\imath S_{f1}]. \tag{1}$$

где $\mathbf{r}_1$ - радиус-вектор, определяющий положение центра отверстия дифракционной решетки, $\sqrt{\rho(\mathbf{r}_f; \mathbf{r}_1)}$ - амплитуда волновой функции, явный вид которой определяется геометрией экрана наблюдения частиц; E - энергия частицы; $\hbar$ - постоянная Планка;

$$S_{f1} = \frac{1}{\hbar}\mathbf{p}\mathbf{r}_{f1} \tag{3}$$

- безразмерное действие частицы вдоль вектора $\mathbf{r}_{f1} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{p}$ - вектор импульса частицы совпадающий по направлению с вектором $\mathbf{r}_{f1}$, с абсолютной величиной $\mid \mathbf{p} \mid = \sqrt{2mE}$.

$$\psi(\mathbf{r}_f, t) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\rho(\mathbf{r}_f, \mathbf{r}_i)} \exp[\frac{\imath}{\hbar} E] \exp[\imath S_{fi}], \tag{4}$$

где $\mathbf{r}_i$ - определяет положение центра i-го отверстия дифракционной решетки; $\sqrt{\rho(\mathbf{r}_f; \mathbf{r}_i)}$ - амплитуда i-той волновой функции;

$$S_{fi} = \frac{1}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{r}_{fi} \tag{5}$$

-безразмерные действия частицы вдоль вектора $\mathbf{r}_{fi} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_1$.

Плотность вероятности $\rho(\mathbf{r}_f)$ обнаружить частицу в точке экрана $\mathbf{r}_f$, определяется квадратом абсолютной величины амплитуды волновой функции (4), то есть

$$\rho(\mathbf{r}_f) = \sum_{i=1}^{N} \rho(\mathbf{r}_f, \mathbf{r}_i) + 2 \sum_{j<i=1}^{N} \sqrt{\rho(\mathbf{r}_f, \mathbf{r}_i)}\sqrt{\rho(\mathbf{r}_f, \mathbf{r}_j)} \cos[S_{fi} - S_{fj}]. \tag{6}$$

Зная плотность вероятности $\rho(\mathbf{r}_f)$, можно определить вероятность обнаружить частицу на малой площадке экрана σ_f центр которой имеет координату $\mathbf{r}_f$: $P(\sigma_f) = \rho(\mathbf{r}_f)\sigma_f$. Уравнение для данной вероятности:

$$P(\sigma_f) = \sum_{i=1}^{N} P(\sigma_f; \mathbf{r}_i) + 2 \sum_{j<i=1}^{N} g(\sigma_f, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) P(\sigma_f; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \tag{7}$$

где $P(\sigma_f; \mathbf{r}_i) = \rho(\mathbf{r}_f, \mathbf{r}_i)\sigma_f$ - вероятность попадания частицы на площадку экрана σ_f когда она прошла через i-тое отверстие;

$$P(\sigma_f; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \sqrt{P(\sigma_f; \mathbf{r}_i)}\sqrt{P(\sigma_f; \mathbf{r}_j)}\, |\cos[S_{fi} - S_{fj}]\,| \tag{8}$$

-вероятность попадания частицы на площадку экрана σ_f когда она одновременно прошла через i-тое и j-тое отверстия (вероятность совместных событий, одновременного прохождения частицы через i - тое и через j - тое отверстия);

$$g(\sigma_f, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \cos[S_{fi} - S_{fj}] |\cos[S_{fi} - S_{fj}]\,|^{-1} \tag{7}$$

- функция, принимающая значение +1 или -1 в зависимости от значений действий S_{fi}, S_{fj}.

Обозначим события: $A_i, i = 1, 2, ..., N$ – события прохождения частицы через i-тое отверстие решетки; B_f – события появления частицы на площадке экрана σ_f; $S_{fi} = B_f \cap A_i$ – событие прохождения частицы через i-тое отверстие решетки и появления на площадке σ_f экрана наблюдения. Уравнение (7) в терминах введенных событий имеет вид

$$P(B_f) = \sum_{i=1}^{N} P(S_{fi}) + 2 \sum_{j<i=1}^{N} g_{fij} P(S_{fi} \cap S_{fj}), \tag{10}$$

где $P(B_f), P(S_{fi})$ - вероятности реализации соответственно событий B_f, S_{fi}; $g_{fij} = g(S_{fi}, S_{fj})$ –функция принимает значения +1 или -1 в зависимости от соотношений между событиями S_{fi} и S_{fj}; $P(S_{fi} \cap S_{fj})$ – вероятность пересечения совместных событий S_{fi} и S_{fj} ($1 \geq P(S_{fi} \cap S_{fj}) > 0$ для совместных событий и $P(S_{fi} \cap S_{fj}) = 0$ для несовместных событий).

$$\sum_{n=1}^{N} |n\rangle\langle n| = 1, \qquad \langle n'|n\rangle = \delta_{n'n}, \tag{P3}$$

$$\hat{V}_{intf} = e\hat{x}E_0\cos(\Omega\tau) \tag{P4}$$

– гамильтониан взаимодействия системы и электромагнитного поля [?]; $\hat{x}$ – оператор координаты частицы с зарядом e; Ω_k – частота поля моды k. Нашей задачей является определение вероятностей переходов $P(m,t;n,0)$ между квантовыми состояниями $|n\rangle$ и $|m\rangle$ исследуемой системы и их зависимости от интервала времени t взаимодействия с электромагнитным полем.

Уравнение эволюции статистического оператора имеет вид:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}_D(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}_D^{+}(t), \qquad (P5)$$

где $\hat{\rho}(t)$, $\hat{\rho}(0)$ – статистические операторы системы соответственно в моменты времени t и $t = 0$,

$$\hat{U}_D(t, t_0) = T\exp[-\frac{\imath}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t}\hat{V}_D(\tau)d\tau], \qquad (P6)$$

$$\hat{V}_D(\tau) = \exp[\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_{syst}\tau]\hat{V}_{inf}(\tau)\exp[-\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_{syst}\tau]. \qquad (P7)$$

Запишем уравнение (P5) эволюции статистической матрицы плотности в энергетическом представлении

$$\rho_{n_f m_f}(t) = \sum_{n_0,m_0} \langle n_f|\hat{U}_D(t)|n_0\rangle \rho_{n_0,m_0} \langle m_0|\hat{U}_D^{+}(t)|m_f\rangle, \qquad (P8)$$

где

$$\rho_{n_f m_f}(t) = \langle n_f|\hat{\rho}(t)|m_f\rangle, \qquad \rho_{n_0,m_0} = \langle n_0|\hat{\rho}(0)|m_0\rangle.$$

Ядро оператора эволюции $\langle n_f|\hat{U}_D(t,0)|n_0\rangle$ представим в виде произведения элементарных ядер, используя групповые свойства оператора $\hat{U}_D$ и полноту векторов-состояний $|n_k\rangle$:

$$\langle n_f|\hat{U}_D(t,0)|n_0\rangle =$$

$$= \langle n_f|\prod_{k=1}^{K+1}\hat{U}_D(t_k,t_{k-1})|n_0\rangle = \sum_{n_1,..,n_K=1}^{N}\prod_{k=1}^{K+1}\langle n_k|\hat{U}_D(t_k,t_{k-1})|n_{k-1}\rangle \qquad (P9)$$

где $t_{K+1}=t$, $n_{K+1}=n_f$, $t_0=0$ и

$$\hat{U}_D(t_k,t_{k-1}) = \exp[-\frac{\imath}{\hbar}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\hat{V}_D(\tau)d\tau] \qquad (P10)$$

где $t_k > t_{k-1}$.

Докажем, что для малых интервалов времени ($(t_k - t_{k-1}) \to 0$) ядро оператора эволюции $\langle n_k|\hat{U}_D(t_k, t_{k-1})|n_{k-1}\rangle$ имеет вид

$$\langle n_k|\hat{U}_D(t_k, t_{k-1})|n_{k-1}\rangle = \int\limits_0^1 \exp[-\imath S[n_k, t_k; n_{k-1}, t_{k-1}; \xi_{k-1}]]d\xi_{k-1}, \qquad (P11)$$

где $S[n_k, t_k; n_{k-1}, t_{k-1}; \xi_{k-1}]$ – действие в энергетическом представлении

$$S[n_k, t_k; n_{k-1}, t_{k-1}; \xi_{k-1}] = 2\pi(n_k - n_{k-1})\xi_{k-1} + \Omega^R_{n_k n_{k-1}} \times$$

$$\times(\cos(2\pi(n_k - n_{k-1})\xi_{k-1} + (\Omega + \omega_{n_k, n_{k-1}})\frac{t_k + t_{k-1}}{2}) +$$

$$+\cos(2\pi(n_k - n_{k-1})\xi_{k-1} - (\Omega - \omega_{n_k, n_{k-1}})\frac{t_k + t_{k-1}}{2}))(t_k - t_{k-1}). \qquad (P12)$$

$\omega_{l'l}$ – частота квантового перехода системы между стационарными состояниями с энергиями $E_{l'}$ и E_l:

$$\omega_{l'l} = \frac{E_{l'} - E_l}{\hbar}, \qquad \Omega^R_{n_k n_{k-1}} = \frac{X_{n_k n_{k-1}} E_0}{\hbar} \qquad (P23)$$

Подставляя (P11) в уравнение (P9), получим ядро оператора эволюции за интервал времени t в виде уравнения

$$\langle n_f|\hat{U}_D(t,0)|n_0\rangle =$$

$$= \sum_{n_1,..,n_K=1}^{N} \int_0^1 .. \int_0^1 \exp[-\imath S[n_f, n_K, \xi_K; ..; n_k, \xi_k; ..; n_1, \xi_1, n_0, \xi_0]] d\xi_0..d\xi_K, \qquad (P35)$$

где действие S является функционалом на пространстве траекторий, определяемых в дискретном пространстве переменных n_k, размеры которого определяются числом квантовых уровней исследуемой системы, и на непрерывном ограниченном на $[0,1]$ пространстве ξ_k:

$$S[n_f, n_K, \xi_K; ..; n_k, \xi_k; ..; n_1, \xi_1, n_0, \xi_0] = \sum_{k=1}^{K+1} S[n_k, n_{k-1}, \xi_{k-1}] \qquad (P36)$$

с условиями: $t_{K+1} = t$, $n_{K+1} = n_f$, $t_0 = 0$.

Подставляя уравнение (P35) в уравнение (P8), получим уравнение эволюции матрицы плотности в виде

$$\rho_{m_f,n_f}(t)=\sum_{n_0,..,n_K=1}^{N}\sum_{m_0,..,m_K=1}^{N}\int\limits_0^1 ..\int\limits_0^1 d\xi_0..d\xi_K d\zeta_0..d\zeta_K \rho_{n_0,m_0}(0)\times$$

$$\times\exp[-\imath(S[n_f,n_K,\xi_K;..;n_k,\xi_k;..;n_1,\xi_1,n_0,\xi_0]-$$

$$-S[n_f,m_K,\zeta_K;..;m_k,\zeta_k;..;m_1,\zeta_1,m_0,\zeta_0])], \qquad (P37)$$

где F_f-введенный нормировочный множитель.

Вероятность квантового перехода из чистого квантового состояния $\hat{\rho}(0) = |n_{in}\rangle\langle n_{in}|(\rho_{n_0,m_0}(0) = \delta(n_{in} - n_0)\delta(n_{in} - m_0)$ в начальный момент времени $t = 0$ в конечное чистое квантовое состояние $\hat{\rho}(t) = |n_f\rangle\langle n_f|$ в конечный момент времени t определяется на основании уравнения (P37):

$$P(n_f, t|n_{in}, 0) = \sum_{n_1,..,n_K=1}^{N} \sum_{m_1,..,m_K=1}^{N} \int_0^1 .. \int_0^1 d\xi_0..d\xi_K d\zeta_0..d\zeta_K \times$$

$$\times P_f \exp[-\imath(S[n_f,..,n_k,..,n_{in};\xi_K,..,\xi_k,..,\xi_0]-$$

$$-S[m_f,..,m_k,..,m_{in};\zeta_K,..,\zeta_k,..,\zeta_0])]. \qquad (P38)$$

Рассмотрим многоуровневую квантовую систему, которая взаимодействует с переменным электромагнитным полем (подробно описанную в приложении к данной статье). Вероятность перехода системы из квантового состояния $|n_{in}\rangle$ в момент времени t_{in} в квантовое состояние $|n_f\rangle$, в котором она находилась в момент времени t_f, определяется формулой (P39). Ради наглядности, рассмотрим формулу (P39) для столь малого интервала времени $(t_f - t_{in})$, что в ней можно оставить лишь один промежуточный момент времени t_1, так что она принимает вид

$$P(n_f, t_f | n_{in}, t_{in}) = \sum_{n_1=1}^{N} \sum_{m_1=1}^{N} \int_0^1 ... \int_0^1 d\xi_0 d\xi_1 d\zeta_0 d\zeta_1 P_f \exp[S[n_f; n_1, \xi_1; n_{in}, \xi_0] - S[n \tag{P39}$$

где действие в энергетическом представлении имеет вид (P36) с учетом (P12) и условия $n_0 = n_{in}, m_0 = m_{in}$. где действие в энергетическом представлении, согласно (P36), имеет вид

$$S[n_f; n_1, \xi_1; n_{in}, \xi_0] = \sum_{k=1}^{2} S[n_k, n_{k-1}, \xi_{k-1}], \tag{53}$$

$$S[n_k, t_k; n_{k-1}, t_{k-1}; \xi_{k-1}] = 2\pi(n_k - n_{k-1})\xi_{k-1} +$$
$$+\Omega^R_{n_k n_{k-1}}[\cos(2\pi(n_k - n_{k-1})\xi_{k-1} + (\Omega + \omega_{n_k, n_{k-1}})\frac{t_k + t_{k-1}}{2}) +$$
$$+\cos(2\pi(n_k - n_{k-1})\xi_{k-1} - (\Omega - \omega_{n_k, n_{k-1}})\frac{t_k + t_{k-1}}{2}))](t_k - t_{k-1}), \quad (54)$$

при условии, $n_0 = n_{in}, n_2 = n_f, t_0 = t_{in}, t_2 = t_f$; точно такую же структуру имеет действие $S[n_f; m_1, \zeta_1; n_{in}, \zeta_0]$ с условиями, что индекс n заменяется на индекс m, причем $m_0 = n_{in}, m_2 = n_f$; P_f – нормировочная постоянная.

Покажем, что вероятность квантового перехода системы (P38) может быть представлена как сумма по траекториям от действительного функционала:

$$P(n_f, t_f | n_{in}, t_{in}) = \sum_{n_1=m_1=1}^{N} P_f(n_1 = m_1) + \sum_{n_1>m_1=1}^{N} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \times$$

$$\times P_f \cos[S[n_f; n_1, \xi_1; n_{in}, \xi_0] - S[n_f; m_1, \zeta_1; n_{in}, \zeta_0]] d\xi_0 d\xi_1 d\zeta_0 d\zeta_1, \qquad (52)$$

Для сопоставления уравнения (52) с уравнением (49) запишем его в виде

$$P(n_f,t_f|n_{in},t_{in}) = \sum_{n_1=m_1=1}^{N} P_f(n_1=m_1) + \sum_{n_1>m_1=1}^{N} g_{m,n}\times$$

$$\times\Big|\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 P_f\cos[S[n_f;n_1,\xi_1;n_{in},\xi_0]-S[n_f;m_1,\zeta_1;n_{in},\zeta_0]]d\xi_0 d\xi_1 d\zeta_0 d\zeta_1\Big|, \tag{55}$$

где

$$g_{m,n} = \Big[\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \cos[S[n_f;n_1,\xi_1;n_{in},\xi_0]S[n_f;m_1,\zeta_1;n_{in},\zeta_0]]d\xi_0 d\xi_1 d\zeta_0 d\zeta_1\Big]\times$$

$$\times\Big[\Big|\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \cos[S[n_f;n_1,\xi_1;n_{in},\xi_0]S[n_f;m_1,\zeta_1;n_{in},\zeta_0]]d\xi_0 d\xi_1 d\zeta_0 d\zeta_1\Big|\Big]^{-1}, \tag{56}$$

$$P(f,i)=\sum_{n=1}^{N}P(S_n)+2\sum_{n>m=1}^{N}g(S_n,S_m)P(S_n\cap S_m)$$

где

$$P(S_{n_1}\cap S_{m_1})=|\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 P_f\cos[S[n_f;n_1,\xi_1;n_{in},\xi_0]-S[n_f;m_1,\zeta_1;n_{in},\zeta_0]]d\xi_0 d\xi_1 \tag{57}$$

при условии $n=n_1,\ m=m_1$.

$$P(S_1\cup S_2)=P(S_1)+P(S_2),\qquad P(S_1\cap S_2)=P(S_1)+P(S_2)-P(S_1\cap S_2),$$

$$1\geq P(S_{f1}\cap S_{f2})>0,\qquad S_1\cap S_2\neq 0$$

В пространстве событий S_{f1}, S_{f2} определим события S_{f1}^{-}, S_{f2}^{-} следующими уравнениями

$$S_{f1}^{-} = S_{f1} \backslash (S_{f1} \cap S_{f2}), \qquad S_{f2}^{-} = S_{f2} \backslash (S_{f1} \cap S_{f2}), \tag{12}$$

или

$$S_{f1} = S_{f1}^{-} \cup (S_{f1} \cap S_{f2}), \qquad S_{f2} = S_{f2}^{-} \cup (S_{f1} \cap S_{f2}). \tag{13}$$

События S_1^{-}, S_2^{-} значат реализацию соответственно только первого, только второго событий.
В соответствии с определениями (12), (13), события S_{f1}^{-}, S_{f2}^{-} являются несовместными,то есть $S_{f1}^{-} \cap S_{f2}^{-} = 0$, а их вероятности и вероятности объединения определяются уравнениями [16]:

$$P(S_1^{-}) = P(S_1) - P(S_1 \cap S_2), \qquad P(S_2^{-}) = P(S_2) - P(S_1 \cap S_2), \tag{14}$$

$$P(S_{f1}^{-} \cup S_{f2}^{-}) = P(S_{f1}) + P(S_{f2}) - 2P(S_{f1} \cap S_{f2}). \tag{15}$$

В соответствии с уравнениями (15), (16) вероятность $P(B_f)$ появления события B_f определяется уравнением

$$P(B_f) = P(S_{f1}) + P(S_{f2}) - 2P(S_f \cap S_{f2}). \tag{17}$$

Для определения вероятности $P(B_f)$, мы будем полагать, что событие B_f, появления частицы на экране, определяется уравнением

$$B_f = S_{f1}^{-} \cup S_{f2}^{-}. \tag{16}$$

Вероятности этих событий $P(S_{f1}^{+}), P(S_{f2}^{+})$, определяются через вероятности событий S_{f1}, S_{f2} уравнениями

$$P(S_{f1}^{+}) = P(S_{f1}) + P(S_{f1} \cap S_{f2}) \qquad P(S_{f2}^{+}) = P(S_{f2}) + P(S_{f1} \cap S_{f2}), \tag{18}$$

а их объединение уравнением

$$P(S_{f1}^{+} \cup S_{f2}^{+}) = P(S_{f1}) + P(S_{f2}) + 2P\big(S_{f1} \cap S_{f2}\big). \tag{19}$$

Обоснование существования событий S_{f1}^{+}, S_{f2}^{+} и уравнений (18), (19) в рамках аксиоматики Колмогорова встречается с большими трудностями и противоречиями. Например, можно предложить, что для двух совместных случайных событий S_{f1}, S_{f2}, события S_{f1}^{+}, S_{f2}^{+} определяются равенствами:

$$S_{f1}^{+} = S_{f1} \cup (S_{f1} \cap S_{f2}) \qquad S_{f2}^{+} = S_{f2} \cup (S_{f1} \cap S_{f2}), \tag{20}$$

или

$$S_{f1} = S_{f1}^{+} \backslash (S_{f1} \cap S_{f2}) \qquad S_{f2} = S_{f2}^{+} \backslash (S_{f1} \cap S_{f2}). \tag{21}$$

Однако, равенства (20), (21) несовместимы с Колмогоровской трактовкой событий. Интерпретация событий в уравнениях (20),(21) множествами, как это предусмотрено аксиоматикой Колмогорова, недопустимо,так как это приводит к противоречию (например, в уравнении (20) получится $S^{+}_{f1} = S_{f1},\ S^{+}_{f2} = S_{f2}$). События S^{+}_{f1}, S^{+}_{f2} и уравнения (18), (19) дополнительными положениями к аксиоматике Колмогорова.
Появления события B_f в пространстве событий S^{+}_{f1}, S^{+}_{f2} определяем уравнением

$$B_f = S^{+}_{f1} \cup S^{+}_{f2}. \tag{22}$$

В соответствии с уравнениями (19), (22) вероятность $P(B_f)$ появления события B_f определяется уравнением

$$P(B_f) = P(S_{f1}) + P(S_{f2}) + 2P(S_{f1} \cap S_{f2}), \tag{23}$$

которое соответствует уравнению (10) при $g = +1$. Уравнения (16),(22) эквивалентны уравнению

$$B_f = (\tilde{S}_{f1} \cup \tilde{S}_{f2}). \tag{25}$$

Из уравнений (24), (25) следует уравнение

$$P(B_f) = P(S_{f1}) + P(S_{f2}) + 2g_{f,1,2}P\big(S_{f1} \cap S_{f2}\big), \tag{26}$$

которое совпадает с уравнением (10) для случая $N = 2$.

Уравнения (17), (23) можно записать в виде одного уравнения. С этой целью обозначим символом $\tilde{S}_{fi}$ события, каждое из которых может быть или событием S^{-}_{fi}, или событием S^{+}_{fi} (i=1,2), в зависимости от номера f. Учитывая введенные обозначения, уравнения (15),(19) записываются в виде уравнения

$$P(\tilde{S}_{f1} \cup \tilde{S}_{f2}) = P(S_{f1}) + P(S_{f2}) + 2g_{f,1,2}P\big(S_{f1} \cap S_{f2}\big), \tag{24}$$

где $g(f,1,2)$ – функция, принимающая одно из значений +1, -1, в зависимости от свойств событий $\tilde{S}_{f1}, \tilde{S}_{f2}$.

$$P(S_{fi}\cap S_{fj}) \neq 0, \;\; P(S_{fi}\cap S_{fj}\cap S_{fk}) \neq 0, \;\; \ldots \;\; P(S_{f1}\cap S_{f2}\cap ...\cap S_{fN}) \neq 0, \tag{27}$$

а для других несовместные между собой:

$$P(S_{fi}\cap S_{fj}) = 0, \;\; P(S_{fi}\cap S_{fj}\cap S_{fk}) = 0, \;\; \ldots \;\; P(S_{f1}\cap S_{f2}\cap ...\cap S_{fN}) = 0, \tag{28}$$

все индексы $i, j, k, ...$ в выражениях (27), (28) принимают значения от 0 до N.

$$P(S^{-}_{fi}) = P(S_{fi}) -$$

$$-2\sum_{i=1}^{N} P\big(S_{fi}\cap S_{fj}\big) + 4\sum_{j<k=1}^{N} P\big(S_{fi}\cap S_{fj}\cap S_{fk}\big) + \ldots + (-2)^{N-1} P(S_1\cap S_2\cap ...\cap S_N), \tag{29}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{N} S_{fi}^{-}) = \sum_{i=1}^{N} P(S_{fi}) -$$

$$-2 \sum_{i<j=1}^{N} P\big(S_{fi} \cap S_{fj}\big) + 4 \sum_{i<j<k=1}^{N} P\big(S_{fi} \cap S_{fj} \cap S_{fk}\big) + \ldots + (-2)^{N-1} P(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_N) \tag{30}$$

Вероятность каждого события S^+_{fi} определяется через вероятности событий S_{fi} и вероятности их пересечений (28) уравнением

$$P(S^+_{fi}) = P(S_{fi}) + 2\sum_{j=1}^{N} P\big(S_{fi} \cap S_{fj}\big) -$$

$$-4\sum_{i<k=1}^{N} P\big(S_{fi} \cap S_{fj} \cap S_{fk}\big) + \ldots + (2)^{N-1}(-1)^N P(S_{f1} \cap S_{f2} \cap ... \cap S_{fN}), \quad (31)$$

а вероятность объединения этих событий представляется уравнением

$$P(\bigcup_{i=1}^{N} S^+_{fi}) = \sum_{i=1}^{N} P(S_{fi}) + 2\sum_{i<j=1}^{N} P\big(S_{fi} \cap S_{fi}\big) -$$

$$-4\sum_{i<j<k=1}^{N} P\big(S_{fi} \cap S_{fi} \cap S_{fk}\big) + \ldots + 2^{N-1}(-1)^N P(S_{f1} \cap S_{f2} \cap ... \cap S_{fN}). \quad (32)$$

Каждую пару уравнений (29), (31) и (30), (32), можно записать в виде одного уравнения. С этой целью для $2NN_f$ случайных совместных событий S^-_{fi}, S^+_{fi} введем NN_f случайных событий $\tilde{S}_{fi}$, каждое из которых принимает значение или S^-_{fi} или S^+_{fi}. Вероятность события $\tilde{S}_{fi}$ представляется формулой, которая объединяет уравнения (29), (30):

$$P(\tilde{S}_{fi}) = P(S_{fi}) + 2\sum_{j=1}^{N} g(fij)P(S_{fi}\cap S_{fj})+$$

$$+4\sum_{j<k=1}^{N} g(fijk)P(S_{fi}\cap S_{fj}\cap S_{fk})+\ldots+2^{N-1}g(f12...N)P(S_{f1}\cap S_{f2}\cap ...\cap S_{fN}), \tag{33}$$

вероятность объединения N событий $\tilde{S}_{fi}$ для каждого f представляется формулой, которая является объединением (совместной записью) уравнений (30), (32):

$$P(\bigcup_{i=1}^{N}\tilde{S}_{fi}) = \sum_{i=1}^{N} P(S_{fi}) + 2\sum_{i<j=1}^{N} g_{fij}P(S_{fi}\cap S_{fj})+$$

N

Для построения уравнения для $P(B_f)$ - вероятности события B_f, мы будим полагать в нашей модели, что событие B_f является объединением событий $\tilde{S}_{fi}$, то есть

$$B_f = \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{S}_{fi}. \tag{35}$$

Уравнение (35) является обобщением уравнения (22). Уравнение для $P(B_f)$ получаем на основании уравнения (35), учитывая (34),

$$P(B_f) = \sum_{i=1}^{N} P(S_{fi}) + 2 \sum_{i<j=1}^{N} g_{fij} P(S_{fi} \cap S_{fj}) +$$

$$+4 \sum_{i<j<k=1}^{N} g_{fijk} P(S_{fi} \cap S_{fj} \cap S_{fk}) + \ldots + 2^{N-1} g_{f12\ldots N} P(S_{f1} \cap S_{f2} \cap \ldots \cap S_{fN}), \tag{36}$$

Уравнение (36) в приближении, когда существуют лишь попарно совместные события S_{fi}, то есть для каждой пары событий

$$(S_{fi} \cap S_{fj}) \neq 0, \quad P(S_{fi} \cap S_{fj}) \neq 0, \tag{37}$$

и в тоже время для всех событий выполняются условия:

$$(S_{fi} \cap S_{fj} \cap S_{fk}) = 0, \ \ldots \ (S_{f1} \cap S_{f2} \cap ... \cap S_{fN}) \ = 0, \tag{38}$$

$$P(S_{fi} \cap S_{fj} \cap S_{fk}) = 0, \ \ldots \ P(S_{f1} \cap S_{f2} \cap ... \cap S_{fN}) = 0, \tag{39}$$

тождественно экспериментально подтвержденному уравнению (10).

$$P(\bigcup_{i=1}^{N} \tilde{S}_{fi}) = \sum_{i=1}^{N} P(S_{fi}) + 2 \sum_{i<j=1}^{N} g_{fij} P(S_{fi} \cap S_{fj})$$

Thanks for your attention!